

DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS DE ARRIOSTRE PARA EDIFICIOS Y CÁLCULO DE NO LINEARIDADES FÍSICAS Y GEOMÉTRICAS

Francisco Aguirre Torrico

Centro de Investigaciones de Materiales y Obras Civiles - CIMOC

Universidad Privada Boliviana

faguire@upb.edu

(Recibido el 12 de noviembre 2007, aceptado para publicación el 29 de diciembre 2007)

RESUMEN

En el presente trabajo se estudia problemas de estabilidad global de las estructuras de hormigón armado en edificios. Se muestran algunos parámetros para definir la sensibilidad de las estructuras con relación a efectos de 2^o orden, clasificando las estructuras en traslacionales y no traslacionales. Son discutidos algunos procedimientos para realizar un análisis de segunda orden global de las estructuras. En estos cálculos es necesario considerar la no linealidad geométrica (NLG) y física (NLF), en los que se puede adoptar métodos rigurosos o aproximados. Solamente después de un análisis global de la estructura, sea de primer orden o de segundo orden, se verifica la inestabilidad local y se realiza el dimensionamiento de la sección.

Palabras Clave: Estabilidad, Pandeo, Edificios, Columnas, Transnacional.

1. INTRODUCCIÓN

Los nudos de la estructura de un edificio se desplazan lateralmente cuando están sujetos a cargas horizontales y cargas verticales, de forma que en algunos casos, estos desplazamientos pueden ocasionar un incremento importante de momentos flectores, especialmente en las columnas, que dan lugar a efectos de 2^o orden. En este caso, es necesario establecer el equilibrio de la estructura en su posición deformada.

Las normas [1] y [2], entre otras, clasifican las estructuras en intranslacionales o de nudos fijos y traslacionales o de nudos móviles, dependiendo de la sensibilidad de éstas con relación a efectos de 2^o orden global. Las mismas normas indican que una estructura de edificio puede ser considerada intranslacional, si los desplazamientos de los nudos provocan un aumento menor al 10% en los momentos flectores relevantes de primer orden. La norma [3] adopta un límite de 5%. Igualmente, es necesario considerar un criterio práctico para definir si una estructura es traslacional o intranslacional. Siendo que en el caso de ser traslacional, los desplazamientos no pueden ser desconsiderados y es necesario realizar el análisis de 2^o orden.

Al realizar la verificación de la sensibilidad de la estructura frente a los efectos de 2^o orden, es necesario incluir en el cálculo estructural la NLF del material, o sea considerar el hormigón armado, tomando en cuenta los efectos de fisuración, deformación lenta, comportamiento no lineal del diagrama tensión-deformación del hormigón, etc. Una manera usual y simplificada, permitido por las normas, es considerar una disminución promedio de la rigidez a la flexión de las barras promedio, porque en una estructura existe tramos muy fisurados, poco fisurados y otros no fisurados.

2. PARÁMETRO DE INESTABILIDAD

Entre los varios parámetros encontrados en la literatura y en las normas, tal vez el más conocido y utilizado sea el parámetro de inestabilidad α (posteriormente definido), que tiene el objetivo de dar al proyectista una idea sobre la sensibilidad de la estructura frente a los efectos de 2^o orden.

2.1. Carga crítica de elementos sujetos a compresión simple

Para entender la procedencia de α , inicialmente se obtendrá la carga crítica de pandeo elástico de una barra bi-rotulada, Figura 1.

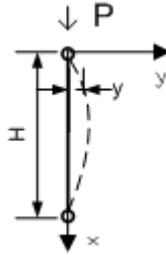


Figura 1 – Esquema una barra bi-rotulada, sujeta a compresión simple.

Para una configuración deformada, igualando el momento interno resistente (expresión aproximada) y el momento externo actuante, ecuación (1), se obtiene la ecuación (2).

$$M_{int} = -E \times I \times \frac{d^2 y}{dx^2} \qquad M_{ext} = P \times y \qquad (1)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 \times y = 0 \qquad (2)$$

$$\text{con} \qquad k^2 = \frac{P}{E \times I} \qquad (3)$$

En las expresiones anteriores, EI es la rigidez a flexión elástica.

La solución general de la ecuación diferencial (2), es de la forma:

$$y = A \times \cos(k \times x) + B \times \text{sen}(k \times x) \qquad (4)$$

Aplicando las condiciones de contorno del problema a la ecuación (4), se obtiene:

$$A = 0 \quad \text{y} \quad B \times \text{sen}(k \times H) = 0$$

En esta última expresión, si B = 0 (columna recta), se tiene la solución trivial que no interesa. La otra solución implica que:

$$\text{sen}(k \times H) = 0 \qquad (5)$$

donde H es la altura de la columna. Para que esta expresión sea verdadera:

$$k \times H = n \times \pi \qquad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, \dots \qquad (6)$$

Considerando la ecuación (3), será adoptado:

$$\alpha = H \times k = H \times \sqrt{\frac{P}{E \times I}} \qquad (7)$$

Para una barra bi-rotulada, se tiene entonces:

$$\alpha = n \times \pi \qquad (8)$$

Para determinar el valor de la carga crítica de pandeo de la barra bi-rotulada, es necesario emplear las expresiones (3) y (6), teniendo en cuenta que n = 1 (para producir la menor carga crítica).

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \times E \times I}{H^2} \qquad (9)$$

Este valor crítico, puede expresarse también utilizando el parámetro α , entonces para el caso de la barra bi-rotulada se tiene:

$$\alpha_{cr} = \pi \cong 3,14 \qquad (10)$$

Otra manera de verificar la sensibilidad de la estructura a los efectos de 2º orden es considerando el parámetro α .

2.2. Carga crítica de elementos sujeto a compresión variable

En la Figura 2 se muestra el concepto sencillo de elementos de arriostre (subestructuras que tienen elevada rigidez a acciones horizontales) y elementos que no pertenecen al sistema de arriostre. En principio, esta distinción carece de importancia porque toda estructura debe tener un sistema espacial de arriostre, cuya definición sólo depende del proyectista.

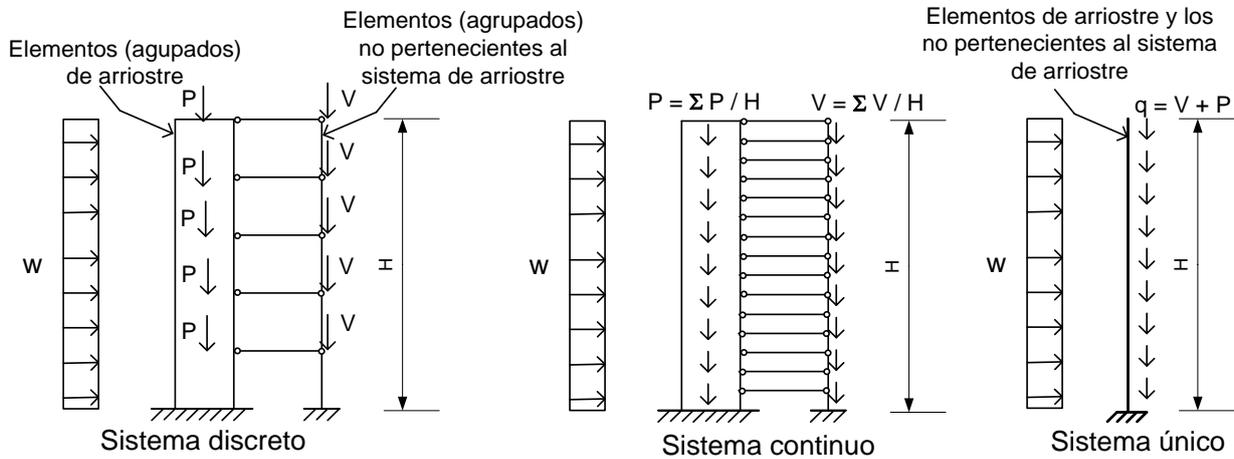


Figura 2 – Esquemas simplificados de la estructura de una edificación.

Para calcular los efectos de 2º orden de una edificación, inicialmente se estudió el sistema continuo de la Figura 2, Beck H. and Koning G.¹ [4], considerando solamente la rigidez a flexión de los elementos de arriostre. Para edificaciones con un gran número de plantas es justificable la transformación de un sistema discreto en continuo.

Se puede adoptar para el sistema de arriostre el sistema único (considerando la rigidez a flexión de la totalidad de los elementos) y una distribución uniforme de las cargas, como muestra la Figura 2. El fenómeno de pandeo de un sistema único sujeto a carga uniforme comprimida es gobernado por una ecuación diferencial. Resolviendo la ecuación diferencial para un comportamiento elástico, o sea un pandeo elástico, se obtiene:

$$\alpha_{cr} = 2,8 \tag{11}$$

En términos de la carga crítica:

$$(q \times H)_{cr} = P_{cr} = \frac{7,84 \times E \times I}{H^2} \tag{12}$$

La Figura 3 muestra el valor de α_{cr} para algunos tipos de barras con diferentes condiciones de contorno:

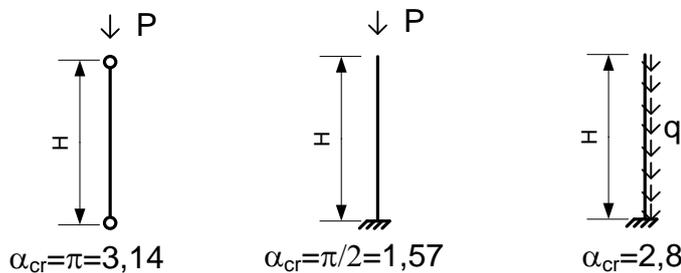


Figura 3 – Valores de α_{cr} para barras con diferentes condiciones de contorno.

En la Figura 4, con el objetivo de mostrar el comportamiento de un elemento comprimido con la variación de la esbeltez, fue realizada una adaptación a la curva “tensión crítica de pandeo-esbeltez” para mostrar que en edificaciones de pocas plantas el valor de α_{cr} es variable.

¹ Beck H. e Konig G. Haltekrafte im Skelettbau, in Beton und Stahlbetonbau, jan. 1967.

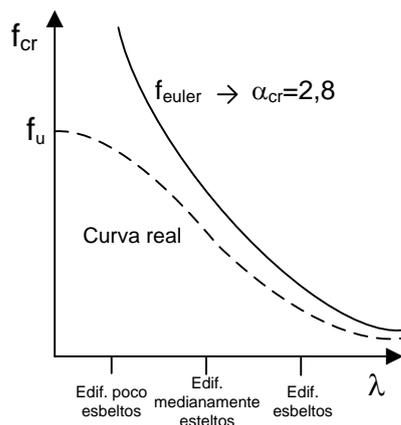


Figura 4 – Curva de pandeo.

En la referencia [5], fue analizado numéricamente el sistema discreto, se obtuvo la ecuación (13) para representar α_{cr} en función del número de plantas y se verificó que el valor de $\alpha_{cr}=2,8$ corresponde aproximadamente a edificaciones con más de 20 plantas y para 4 plantas, $\alpha_{cr}=2,35$.

De manera general,

$$\alpha_{cr} = 2,8 - 1,1 \times e^{-0,22 \times n} \quad (13)$$

donde n es el número de plantas.

3. CÁLCULO DE LOS VALORES LÍMITES DE α

Considerando que un sistema estructural es no translacional cuando los desplazamientos de los nudos provocan un aumento de menos del 10% en los momentos flectores de primer orden en las columnas, o sea:

$$M^{2a} \leq 1,1 \times M^{1a} \quad \text{donde } M^{2a} = \Phi \times M^{1a} \quad (14)$$

En ésta relación, Φ es el factor de amplificación de momentos (para el equilibrio del elemento en su posición deformada).

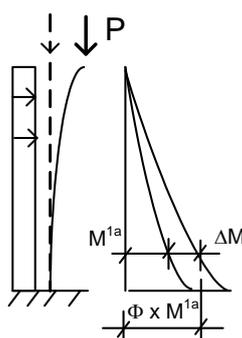


Figura 5 – Esquema de un diagrama de momentos amplificado.

$$\Phi = \frac{C_m}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}, \quad \text{con } C_m = 1 - \frac{P}{P_{cr}} + \frac{P \times \Delta}{M^{1a}} \quad (15)$$

donde P es la carga axial actuante, P_{cr} la carga que provoca pandeo elástico y Δ el desplazamiento lateral de la barra debido a la carga transversal.

Para el caso de una columna empotrada-libre (simplificación del edificio con pantallas) con carga uniforme horizontal y vertical en toda su extensión, el valor de C_m puede variar entre 0,78 a 1,0.

Adoptando, a favor de la seguridad, $C_m = 1,0$ y substituyendo las expresiones (15) en (14), se obtiene:

$$\left[1 - \frac{P}{P_{cr}}\right]^{-1} \leq 1,1 \quad (16)$$

Substituyendo P_{cr} de la ecuación (12) en la expresión anterior:

$$\left[1 - \frac{P}{\frac{7,84 \times E \times I}{H^2}}\right]^{-1} \leq 1,1 \quad (17)$$

En la ecuación (17), para el caso de una estructura de hormigón, considerando el momento de la falla, es necesario sustituir $E \times I$ por $(E \times I)_{NLF}$ (rigidez a flexión considerando la no linealidad física), adoptando el valor promedio:

$$(E \times I)_{NLF} = 0,7 \times (E \times I)_{sec.bruta} = 0,7 \times (E \times I) \quad (18)$$

Resolviendo para P la ecuación (7) y substituyendo (junto con la (18)) en la ecuación (17), se obtiene:

$$\left[1 - \frac{\alpha^2}{5,49}\right]^{-1} \leq 1,1 \quad (19)$$

Resolviendo para α , se tiene:

$$\alpha_{lim} \leq 0,7 \quad (20)$$

El valor de α_{lim} de la ecuación (20) corresponde a un arriostre formado por pantallas, Figura 6, y su elástica tiene la forma correspondiente a la de una ménsula. El arriostre por pórticos tiene una elástica que se adecua a la provocada por los esfuerzos cortantes, Figura 6, en las columnas de cada planta. La combinada asocia ambos tipos de elástica.

Los efectos de 2º orden dependen de la forma de la línea elástica del edificio, y para los diferentes tipos de arriostre, el valor de α_{lim} varia conforme se muestra en la Figura 6. La norma [1] y otras, consideran un único valor de α_{lim} ($= 0,6$), sin considerar la forma de la elástica, pero es posible demostrar que los valores indicados en la Figura 6 son más adecuados.

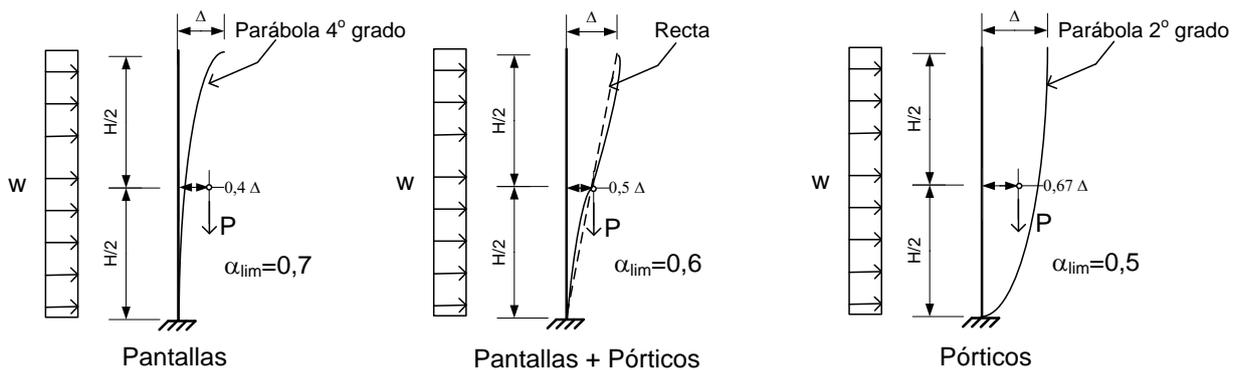


Figura 6 – Valores de α_{lim} para diferentes tipos de arriostre.

Considerando la ecuación (7), a partir de la definición de un valor límite para α , para valores inferiores a α_{lim} , la estructura debe ser considerada como no translacional, si:

$$\alpha = H \sqrt{\frac{\sum P_k}{(E \times I)_{eq}}} \leq \alpha_{lim} \quad (21)$$

donde H es altura de la edificación, desde la cara de los cimientos, ΣP_k es la suma total de las cargas verticales, con sus valores característicos; $(EI)_{eq}$ es la rigidez a flexión equivalente de la estructura de arriostre en la dirección considerada, tomando para el cálculo de la inercia I , la sección bruta de hormigón.

El valor de α_{lim} , ha sido obtenido considerando un comportamiento elástico, que puede corresponder a un edificio con gran número de plantas. Las normas consideran que este valor es adecuado para edificios de más de 4 plantas. Para estructuras hasta 3 plantas, situación en que el modelo continuo no representa bien el modelo discreto, la norma [1] considera la siguiente expresión:

$$\alpha_{lim} = 0,2 + 0,1 \times n \quad (22)$$

donde n es el número de plantas, luego en función al número de plantas:

- $\alpha_{lim} = 0,3$ para 1 planta
- $\alpha_{lim} = 0,4$ para 2 plantas
- $\alpha_{lim} = 0,5$ para 3 plantas
- $\alpha_{lim} = 0,6$ para 4 o más plantas.

Los valores adecuados se pueden obtener por la determinación directa de la carga crítica del sistema discreto considerando la formulación matricial del problema. Esto corresponde a un problema de autovalor y autovector, los autovalores serían las cargas críticas de la estructura y los autovectores los modos de pandeo.

Para la ecuación (21), es necesario verificar la rigidez de la estructura en las direcciones de incidencia de las cargas horizontales. Para el valor de $(EI)_{eq}$ en alguna dirección, Figura 7, es necesario obtener la rigidez equivalente de la estructura considerada como una columna única empotrada-libre, bajo la acción de fuerzas horizontales arbitradas. El desplazamiento horizontal de esta columna, sería impuesto igual a la flecha Δ del desplazamiento de la estructura en estudio debido a la misma carga horizontal. La carga horizontal arbitrada puede ser uniforme o concentrada. De esta manera, se puede considerar cualquier geometría variable del sistema de arriostre de la edificación.

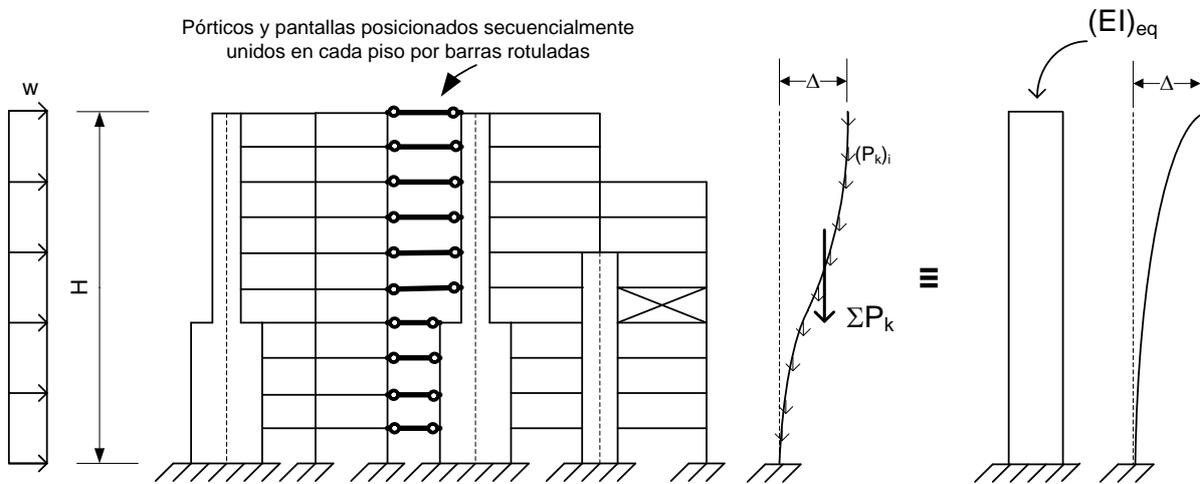


Figura 7 – Obtención del $(EI)_{eq}$

Si el elemento de arriostre es una pantalla, su rigidez equivalente es la propia rigidez real del elemento. El valor de α da una idea del distanciamiento de la situación de pandeo. Para la norma [3], es necesario verificar el sistema de arriostre piso a piso. Otras normas tienen otros parámetros, por ejemplo la norma de la referencia [6] incorpora el γ_z que sirve también como un amplificador de momentos de primer orden.

4. ESTRUCTURAS TRANSLACIONALES

Si el parámetro de inestabilidad es mayor que el límite ($\alpha > \alpha_{lim}$), es necesario considerar un análisis global de 2º orden y la estructura es considerada translacional.

Existen varios métodos en el cálculo de los esfuerzos de 2º orden global, entre los principales se tiene: el método general, el método P-Δ (empleado en los programas comerciales), el método de la amplificación de momentos (modificando la longitud efectiva de la columna), el método del parámetro γ_z , entre otros.

En el caso de estructuras translacionales, las normas consideran que junto con el estudio de la NLG es necesario considerar la NLF, que puede ser de forma aproximada (en el método general de forma exacta). Considerando que el método general es el más realista, se realizará un pequeño resumen de este método para el plano en la dirección del análisis.

5. MÉTODO GENERAL

En este método las ecuaciones de equilibrio corresponden a la configuración deformada, es la NLG. Para la consideración de la NLF es necesario el historial de las tensiones, la curvatura de las secciones y el diagrama no elástico $\sigma \times \epsilon$ de los materiales componentes. En la aplicación del método es necesario considerar de forma rigurosa la NLF.

Es necesario obtener la curva carga x desplazamiento de la estructura Figura 8 y verificar si se alcanza el punto límite de inestabilidad. En realidad, se obtiene una curva $\{F\} \times \{U\}$, donde $\{F\}$ es el vector de cargas de la estructura y $\{U\}$ son los desplazamientos de los nudos de la estructura. Los resultados serán más realistas si se dividen los elementos de la estructura en sub-elementos.

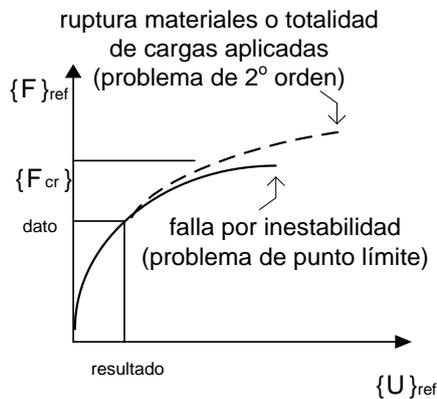


Figura 8 – Curva carga x desplazamiento mostrando el punto límite.

La construcción de la curva debe ser realizada punto a punto, los puntos son definidos por equilibrio de fuerzas y compatibilidad de deformaciones entre 2 etapas. Las etapas serán resumidas en el flujograma de la Figura 9.

En el análisis de la NLG, la matriz de rigidez de la estructura depende de los desplazamientos de la estructura $[K(U)]$ y puede ser definida de la siguiente manera:

$$[K_t] = [K_G] + [K] \quad (23)$$

donde $[K_t]$ es la matriz de rigidez total de la estructura; $[K_G]$ es la matriz de rigidez geométrica no lineal de la estructura, que considera la presencia del esfuerzo axial P, en las barras (el valor del esfuerzo axial depende de la deformación de la estructura), su valor es actualizado en cada etapa de carga; $[K]$ es la matriz de rigidez de 1º orden de la estructura que es actualizada en función de la NLG.

De la Teoría de Elementos Finitos (TEF), las matrices $[K]$ y $[K_G]$ de un elemento de barra son:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$K_G = \frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 36 & -3L \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

El montaje de la matriz de rigidez geométrica de la estructura se realiza considerando las contribuciones de las matrices de los diferentes elementos de la estructura, o sea de forma convencional.

Después de obtener la matriz $[K_i]$, el procedimiento para la obtención de los desplazamientos nodales $\{U\}$ es el mismo de la TEF.

Verificando las etapas del flujograma de la Figura 9, para obtener los esfuerzos en las barras es necesario inicialmente realizar un análisis de 1^{er} orden.

Para obtener nuevas rigideces, es necesario considerar los diagramas de tensiones y deformaciones conforme a la Figura 10.

La obtención de los esfuerzos resistentes será realizada considerando los diagramas de tensiones y de deformaciones de la sección y los diagramas $\sigma \varepsilon$ de los materiales y empleando las siguientes expresiones (así se obtiene la compatibilidad de deformaciones):

$$N_i = \int \sigma_c (\varepsilon_c) \times dA_c + \sum \sigma_{sdi} (\varepsilon_{sdi}) \times A_{si} \quad (26)$$

$$M_i = \int \sigma_c (\varepsilon_c) \times dA_c \times y_c + \sum \sigma_{sdi} (\varepsilon_{sdi}) \times A_{si} \times y_{si} \quad (27)$$

Para algunas etapas de carga los materiales pueden estar trabajando elásticamente. El equilibrio de esfuerzos es la condición de convergencia del procedimiento, si el equilibrio no cumple es necesario un nuevo cálculo de las rigideces y así sucesivamente hasta alcanzar la convergencia. El momento que alcanza la convergencia se obtiene un punto de la curva. Se obtiene otro punto incrementando la carga $\{\Delta F\}$ y así sucesivamente hasta el valor máximo de la carga o hasta alcanzar el punto límite, o si se da el caso, hasta la falla de los materiales.

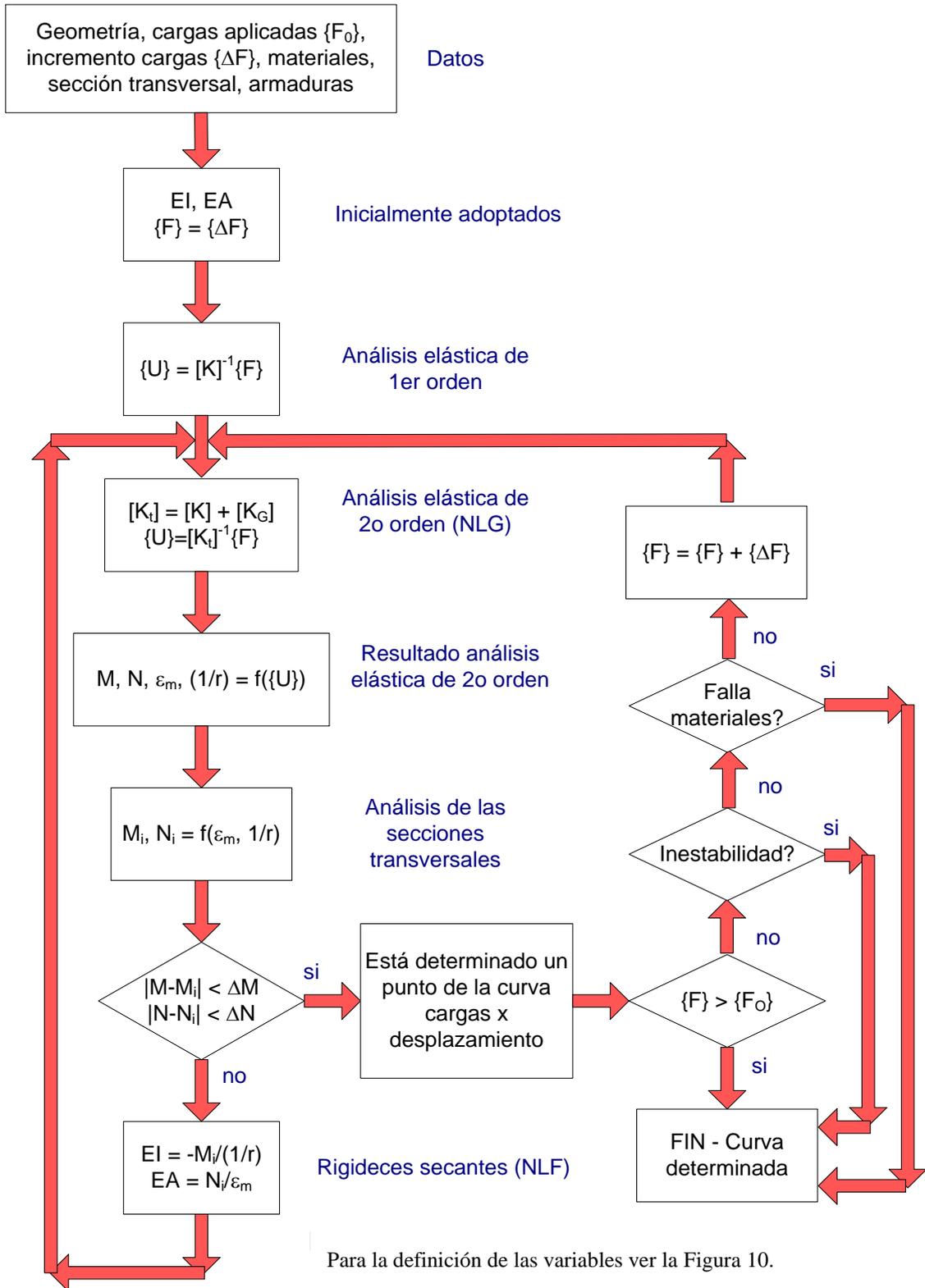


Figura 9 – Flujograma del método general con cargas incrementales, para la definición de las variables ver la Figura 10.

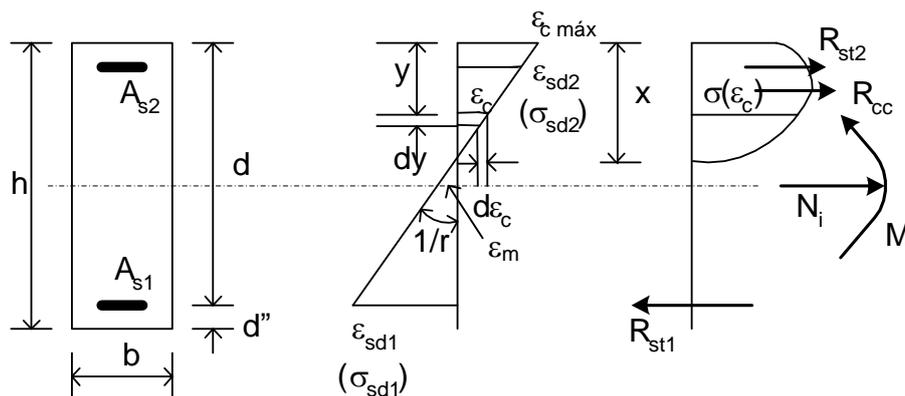


Figura 10 – Configuraciones y nomenclatura a ser considerada en el análisis.

6. CONCLUSIONES

Para que la columna sea analizada en forma aislada, es necesario primero considerar los efectos globales.

Existen diversas maneras para verificar si la estructura es no translacional, de los cuales el más conocido y utilizado por diversas normas es el parámetro α .

Cuando el cálculo se lo realiza globalmente, no interesa quién arriostre a quién, no es importante considerar límites arbitrarios (10% o 5%) para desconocer los efectos de 2º orden, si actualmente éstos se pueden evaluar rápidamente y pueden ser incluidos en el cálculo de los esfuerzos.

Para la verificación del análisis global de 2º orden, es posible utilizar métodos más generales o simplificados, lo importante es que su consideración es obligatoria en el caso de estructuras translacionales. Se debe resaltar que el esfuerzo axial en los elementos estructurales modifica la rigidez a flexión de los elementos, entonces la inclusión en la matriz de rigidez es obligatoria.

7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Comisión Permanente del Hormigón. *Instrucción del Hormigón Estructural*. Ministerio de Fomento (EHE-99). Madrid, 1999.
- [2] Ministerio de Urbanismo y Vivienda. *Código Boliviano del Hormigón (CBH-87)*. La Paz, 1987.
- [3] Standard Building Code. *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-2005)*. American Concrete Institute – Committee 318, Farmington Hills, 2005.
- [4] M. Franco. *Problemas de estabilidade nos edifícios de concreto armado*. Publicação Técnica do Instituto de Engenharia de São Paulo.(Divisão de Estruturas PT-2), 1997.
- [5] A. C. Vasconcelos. *Origem dos parâmetros de estabilidade*. Publicação Técnica do Instituto de Engenharia de São Paulo.(Divisão de Estruturas PT-2), 1997.
- [6] Associação Brasileira de Normas Técnicas. *Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado (NBR-6118)*. Rio de Janeiro, 2004.