

## DIMENSIONAMIENTO INTEGRADO DE SECCIONES SUJETAS A MOMENTOS FLECTORES Y ESFUERZOS CORTANTES PARA CONCRETOS DE ALTA RESISTENCIA

**Francisco Aguirre Torrico**

*Centro de Investigaciones en Materiales y Obras Civiles - CIMOC*

*Universidad Privada Boliviana*

faguirre@upb.edu

(Recibido el 10 de octubre 2010, aceptado para publicación el 15 de noviembre 2010)

### RESUMEN

Este trabajo está orientado al dimensionamiento integrado de elementos sujetos al esfuerzo cortante y momento flector de secciones rectangulares de hormigón de alta resistencia (HAR). Se presenta la Teoría del Campo de Compresión Diagonal Modificada, en la cual se permite el cálculo de elementos sujetos a tensiones normales y tangenciales de hormigón armado de una manera integrada. Además permite considerar las condiciones de equilibrio, de compatibilidad de deformaciones específicas y las relaciones constitutivas en términos de las tensiones y las deformaciones específicas medias. Para el cálculo de las secciones está siendo considerado el diagrama tensión-deformación específica realista de la norma EUROCODE 2 (2004).

El HAR fisurado da las bielas comprimidas es considerado como un nuevo material, su diagrama tensión-deformación específica es afectado por un factor de debilitamiento que disminuye su resistencia a compresión.

**Palabras Clave:** Hormigón de Alta Resistencia, Esfuerzo Cortante, Momento Flector, Dimensionamiento Integrado.

### 1. INTRODUCCIÓN

El uso del hormigón de alta resistencia (HAR) está en aumento en los últimos años. Sus aplicaciones son múltiples en estructuras de edificaciones residenciales, comerciales, estatales e industriales, también en el refuerzo de estructuras, presas, estructuras prefabricadas, pisos de alto tránsito, entre otros.

Los mecanismos resistentes de elementos de hormigón armado bajo la acción de esfuerzos combinados son complejos y las normas se están adaptando a estas nuevas teorías de dimensionamiento.

Las teorías actuales del hormigón fisurado permiten desacoplar los esfuerzos normales y cortantes, y para considerar nuevamente el esfuerzo cortante en el estudio de la flexión, usualmente es realizada una corrección a través del decalado del diagrama de momentos flectores. Los criterios de la investigación realizada en este trabajo están fundamentados en investigaciones realizadas por los profesores Michael P. Collins y Frank Vecchio [1]. En esta teoría, denominada Teoría del Campo de Compresión Diagonal Modificada (TCCDM), se representa el alma de la viga como un conjunto continuo de diagonales fisuradas comprimidas, costurada por estribos y armadura de piel, Figura 2. Es posible incluir las tensiones de tracción existente entre las fisuras diagonales como una manera de introducir el aporte de la fricción entre los agregados a través de estas fisuras diagonales. El valor de esta contribución es función de la abertura de la fisura y de la separación en los estribos y separación de las fisuras. Esta teoría explica físicamente la contribución del hormigón en la resistencia al cortante. Lo interesante de esta teoría es que se puede incluir los esfuerzos que provocan tensiones normales y cortantes de forma integrada modelando el alma de la viga en subelementos, Figura 3. La resistencia a compresión de la diagonal comprimida es función de la abertura de las fisuras diagonales.

En este trabajo se consideran las propiedades mecánicas do HAR, con curvas tensión-deformación específica más realistas (que se aproximan de los resultados experimentales) que provienen de la norma EUROCODE [2].

### 2. CARACTERÍSTICAS DEL HORMIGÓN DE ALTA RESISTENCIA

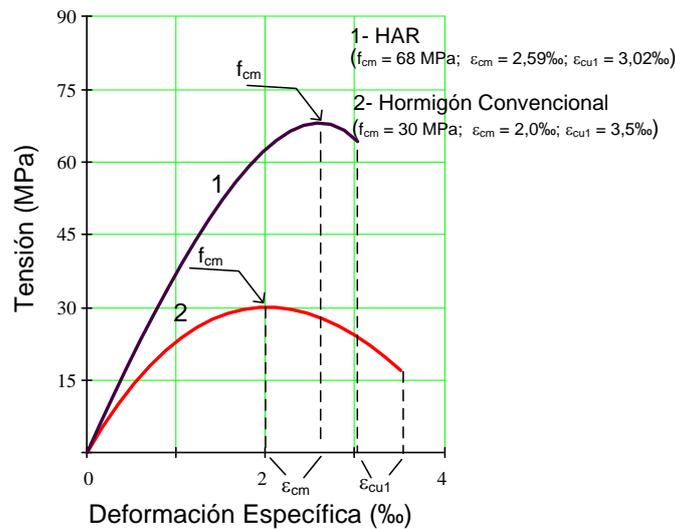
Los beneficios del HAR son muchos, pero no muy explorados en Bolivia, debido a que su demanda es muy reducida, es considerado como un nuevo material por muchos propietarios, ingenieros, contratistas y productores de hormigón.

Los ingredientes del hormigón de alta resistencia y el hormigón convencional son los mismos, excepto que en el HAR, por lo general, se tiene aditivos químicos reductores de agua y muchas veces aditivos minerales tales como cenizas volantes, escoria de altos hornos, micro sílice, puzolanas naturales, etc. Mediante la adición de súper-fluidificantes, se

utilizan pequeñas cantidades de agua, obteniendo abatimientos en el cono de Abrams de 150 a 200 mm con relaciones de a/c entre 0,2 y 0,3. Aparentemente este es el secreto del HAR.

### 2.1 Curvas tensión-deformación específica del HAR

En el HAR, al inicio de un ensayo a compresión simple, la interface entre los agregados y la pasta de cemento tiene una longitud total de grietas menor que el hormigón convencional que hace que su comportamiento se aproxime de un material elástico, ver Figura 1, y con aproximadamente el 85% o más de la resistencia final se forma la etapa de la rápida propagación de las grietas (aumenta rápidamente la pérdida de rigidez del material). La ruptura que sigue puede llevarse a cabo a través del agregado grueso y la matriz. Los agregados no actúan como una barrera para la fisuración, ocurriendo muy rápidamente su ruptura, (no existe una pérdida progresiva de la rigidez). Debido a la menor cantidad de grietas, la parte ascendente y descendente son más inclinadas, por eso los HAR son más frágiles que los hormigones convencionales. Por lo tanto, en los primeros pueden ocurrir rupturas repentinas, que proviene de un almacenaje de energía (durante la aplicación de la fuerza) y una pérdida súbita de esta.



**Figura 1** – Diagramas tensión-deformación específica realista para un HAR y un hormigón convencional, mostrando sus deformaciones límites.

Entre las diversas propuestas de la expresión del diagrama tensión-deformación específica del hormigón ( $\sigma_c \times \epsilon_c$ ) será adoptada de [2], válida para hormigones con resistencias medias a compresión ( $f_{cm}$ ) hasta 98 MPa. La expresión descrita en (1) sirve para el tramo ascendente y descendente y vale hasta la deformación específica última, relaciones (4) y (5).

$$\sigma_c = \frac{k \times \eta(\epsilon_c) - (\eta(\epsilon_c))^2}{1 + (k - 2) \times \eta(\epsilon_c)} \times f_{cm} \tag{1}$$

donde  $\eta(\epsilon_c) = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cm}}$  y  $k = \frac{1,05 \times E_{cs}}{E_{cm}}$ .

Con (2) y (3) se puede obtener las expresiones de las deformaciones específicas correspondientes al pico de la curva, Figura 1.

$$\epsilon_{cm} = 0,7 \times (f_{cm})^{0,31} \text{ para } f_{cm} < 87,5 \text{ MPa} \tag{2}$$

$$\epsilon_{cm} = 2,8 \text{ para } f_{cm} \geq 87,5 \text{ MPa} \tag{3}$$

Las relaciones (4) y (5) muestran las expresiones de la deformación específica última, Figura 1.

$$\epsilon_{cu1} = 2,8 + 27 \times \left( \frac{98 - f_{cm}}{100} \right)^4 \text{ para } 58 \text{ MPa} \leq f_{cm} \leq 98 \text{ MPa} \tag{4}$$

$$\varepsilon_{cu1} = 3,5 \quad \text{para } 20 \text{ MPa} \leq f_{cm} < 58 \text{ MPa} \quad (5)$$

Las deformaciones específicas de (2) hasta (5), están en función de la resistencia media del hormigón  $f_{cm}$ .

El módulo de deformación secante del hormigón correspondiente al pico de la curva es:

$$E_{cm} = \frac{f_{cm}}{\varepsilon_{cm} / 1000} \quad (6)$$

La expresión del módulo de deformación secante en el origen depende de la naturaleza del árido, para agregados de cuarcita, es:

$$E_{cs} = 22000 \times \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{0,3} \quad (7)$$

Multiplicar la expresión anterior por 1,2 para grava de origen basáltico, 0,9 caliza y 0,7 arenisca.

Las unidades de los módulos de deformación y tensiones están en MPa y las unidades de las deformaciones específicas en %.

## 2.2 Resistencia a tracción

En general, la resistencia a la tracción del hormigón no se la contempla en el dimensionamiento de estructuras de hormigón armado. Pero en el modelo que se está proponiendo será considerada. La relación entre la resistencia a tracción y compresión está entre 0,07 y 0,11.

Las expresiones sugeridas por [2] para la resistencia media  $f_{ct,m}$ , resistencia mínima  $f_{ct,min}$  y resistencia máxima  $f_{ct,max}$  corresponden a las relaciones (8) a (11).

$$f_{ct,m} = 0,3 \times (f_{cm} - 8)^{2/3} \quad \text{para } f_{cm} \leq 58 \text{ MPa} \quad (8)$$

$$f_{ct,m} = 2,12 \times \ln \left( 1 + \frac{f_{cm}}{10} \right) \quad \text{para } f_{cm} > 58 \text{ MPa} \quad (9)$$

$$f_{ct,min} = 0,7 \times f_{ct,m} \quad (10)$$

$$f_{ct,max} = 1,3 \times f_{ct,m} \quad (11)$$

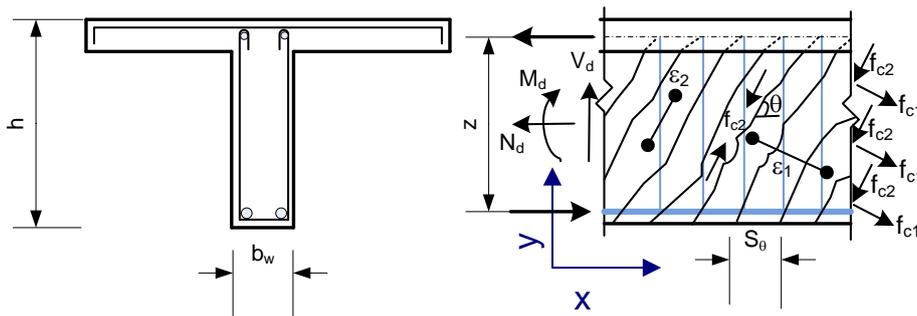
## 3. MODELO DE TCCDM PARA TRAMOS CON CONTINUIDAD (REGIONES B)

El modelo de un elemento resistente de hormigón armado sujeto a flexión, está formado por regiones de hormigones comprimidos unidos por barras de refuerzo, Figura 2. Las hipótesis y consideraciones en esta teoría son:

- La teoría nos permite incluir en la sección transversal de elementos estructurales esfuerzos que provocan tensiones normales y cortantes al mismo tiempo.
- La existencia tensiones de tracción entre las fisuras diagonales pueden contribuir a la resistencia de la sección.
- El hormigón de las bielas inclinadas comprimidas es menos resistente que el hormigón sujeto a compresión simple, su diagrama tensión-deformación específica es más abatido.
- Las tensiones en las armaduras varían a lo largo de esta y junto a las fisuras son mayores.
- Las bielas inclinadas comprimidas se unen entre sí a través de las fisuras por la rugosidad de su superficie que son capaces de transmitir los esfuerzos cortantes y las tensiones normales de compresión, pero no las de tracción.

- Considerando el estado plano de tensiones, el equilibrio de un elemento del alma de la viga ocurre teniendo en cuenta las tensiones resistentes del hormigón fisurado y la armadura de refuerzo.
- Las ecuaciones de equilibrio, que relacionan las tensiones del hormigón y de la armadura con las cargas aplicadas, se expresan en función de las tensiones medias, las cuales se miden en un largo mayor que la distancia entre fisuras.
- Las ecuaciones de compatibilidad, que relacionan las deformaciones específicas en el hormigón con deformaciones específicas en la armadura, son función de las deformaciones medias.
- Entre las consideraciones adoptadas se incluye las ecuaciones constitutivas del hormigón comprimido debilitado, del hormigón traccionado y de las armaduras.

La Figura 2, muestra la sección transversal de una viga T y un corte longitudinal en la viga sujeta a momento flector, esfuerzo normal y esfuerzo cortante (todos en un tramo de esfuerzos positivos).



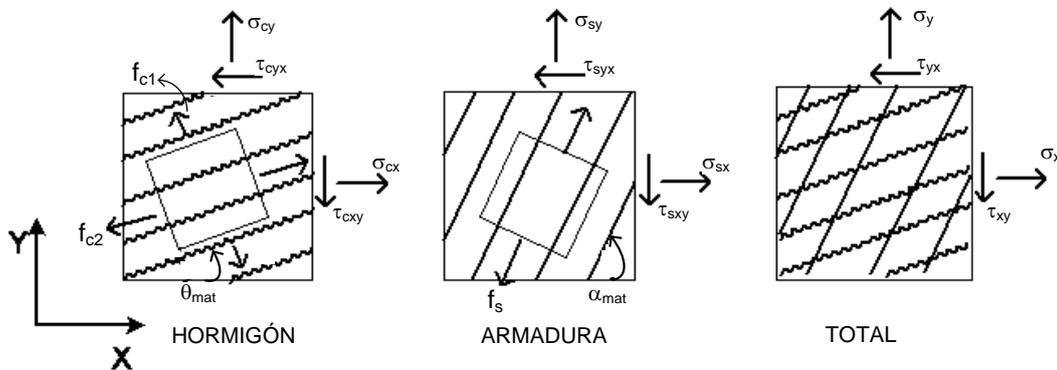
**Figura 2** – Viga fisurada sujeta a momento flector, esfuerzo cortante y esfuerzo normal.

En la Figura 2:

- $f_{c1}$  es la tensión principal media de tracción, perpendicular a la dirección de las fisuras;
- $f_{c2}$  es la tensión principal media de compresión, en la dirección de las bielas comprimidas (hormigón debilitado);
- $\epsilon_1$  es la deformación específica principal media de tracción;
- $\epsilon_2$  es la deformación específica principal media de compresión;
- $\theta$  es el ángulo de inclinación de las fisuras y  $S_\theta$  la separación entre fisuras.

### 3.1 Ecuaciones de equilibrio interno

Para elementos de hormigón armado fisurado y costurado por estribos para determinar las tensiones  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  y determinar el tensor de tensiones para una configuración del estado plano de tensiones, es necesario que todos los materiales contribuyan con su resistencia. La Figura 3 muestra un elemento del alma de la viga, donde las bielas comprimidas están inclinadas de  $\theta_{mat}$  y la armadura transversal inclinadas de  $\alpha_{mat}$ , ambos medidos en el sentido anti-horario.



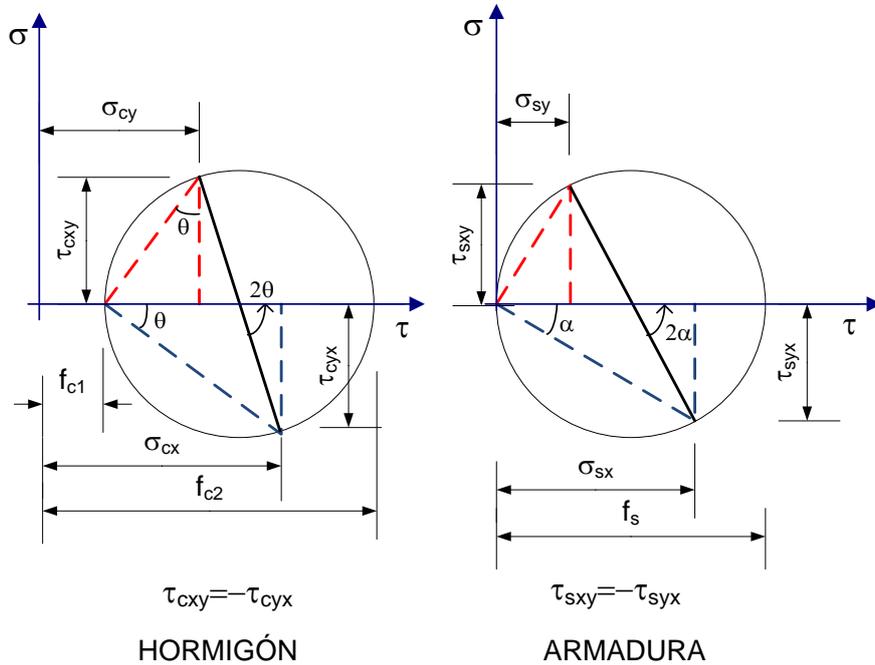
**Figura 3** – Tensiones en los paneles de concreto y armadura.

En la Figura 3,  $f_s$  es la tensión principal que actúa en la armadura transversal (normalmente es la tensión de fluencia).

Considerando la suma de las tensiones en los paneles de concreto y armadura, las tensiones totales serán:

$$\sigma_x = \sigma_{cx} + \sigma_{sx} \quad \sigma_y = \sigma_{cy} + \sigma_{sy} \quad \tau_{xy} = \tau_{cxy} + \tau_{sxy} \quad (12)$$

Para obtener las componentes de las resistencias del hormigón y de la armadura, se utiliza el círculo de Morh, Figura 4.



**Figura 4** – Círculo de Morh de tensiones para los paneles de concreto y armadura (ambas tensiones principales están con signo positivo).

Geoméricamente, las expresiones de la suma de las tensiones del hormigón y armadura se relacionan con las tensiones principales como (son las componentes del tensor de tensiones de un elemento del alma):

$$\sigma_x = f_s \times \cos^2 \alpha + f_{c1} + (f_{c2} - f_{c1}) \times \cos^2 \theta \quad (13)$$

$$\sigma_y = f_s \times \sin^2 \alpha + f_{c1} + (f_{c2} - f_{c1}) \times \sin^2 \theta \quad (14)$$

$$\tau_{xy} = f_s \times \sin \alpha \times \cos \alpha + (f_{c2} - f_{c1}) \times \sin \theta \times \cos \theta \quad (15)$$

Las expresiones (13) a (15), son función de las tensiones principales, las cuales pueden ser obtenidas de expresiones de la norma o mediante ensayos de laboratorio.

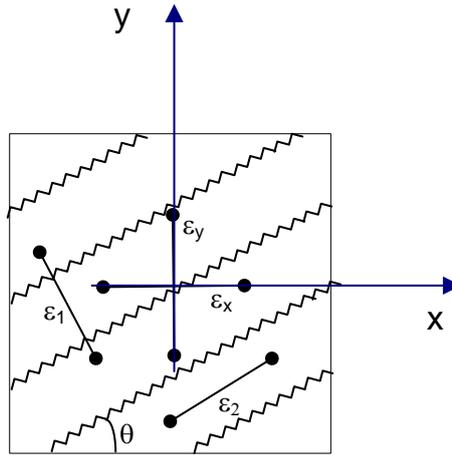
### 3.2 Ecuaciones de compatibilidad de deformaciones

En el caso de un elemento del alma de una viga de hormigón armado fisurada y costurada por estribos se considera que no hay deslizamiento entre el hormigón y las armaduras. Para una misma sección transversal y fibra las deformaciones específicas en el hormigón y armadura deben ser las mismas. La Figura 5 adaptada de [3], muestra las deformaciones específicas lineares de un elemento del alma del hormigón fisurado.

La armadura tiene la misma deformación específica del hormigón que la rodea, por lo tanto:

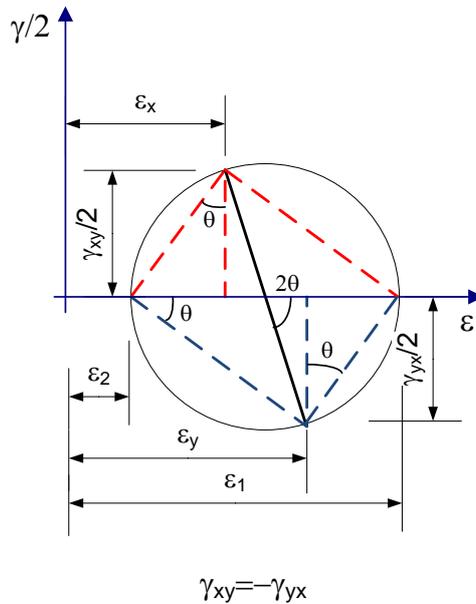
$$\epsilon_{cx} = \epsilon_{sx} = \epsilon_x \quad (16)$$

$$\epsilon_{cy} = \epsilon_{sy} = \epsilon_y \quad (17)$$



**Figura 5** – Deformaciones específicas medias en un elemento del alma fisurado.

Para la determinación de los componentes del tensor de deformaciones en el estado plano de tensiones será utilizado el Círculo de Morh, Figura 6.



**Figura 6** – Círculo de Morh de las deformaciones específicas medias.

Para simplificar las expresiones de la deformación principal de tracción y compresión tienen signos positivos.

Considerando los triángulos superiores se relaciona  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  y resolviendo para  $\epsilon_1$ , se tiene:

$$\epsilon_1 = \epsilon_x + (\epsilon_x - \epsilon_2) \times \cot g^2 \theta \tag{18}$$

A partir de los triángulos inferiores se relaciona  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  y resolviendo para  $\epsilon_y$ , se tiene:

$$\epsilon_y = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 \times \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \tag{19}$$

La expresión (18) relaciona la deformación específica principal media de tracción, Figura 5, con la deformación longitudinal del hormigón (que se puede obtener del análisis de flexión) y con la deformación específica principal

media de compresión (que se puede obtener de las ecuaciones constitutivas). Por otra parte, (19) relaciona la deformación vertical (estribo) con las deformaciones específicas principales medias de tracción y compresión.

### 3.3 Relaciones constitutivas de los materiales

Para completar el número de ecuaciones y resolver las incógnitas del problema, se necesitan las ecuaciones constitutivas que relacionan las tensiones medias con las deformaciones específicas medias para el hormigón y la armadura. Para el hormigón, estas relaciones son bastante diferentes de las obtenidas en ensayos padrones de los materiales aislados.

#### 3.3.1 Relación tensión-deformación específica de la armadura

La tensión axial media en la armadura depende únicamente de la deformación específica axial media. La tensión tangencial perpendicular a la armadura es considerada nula.

Para el acero laminado en caliente se tiene las siguientes relaciones:

$$f_s = E_s \times \varepsilon_s \quad \text{para} \quad \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \quad (20)$$

$$f_s = f_y \quad \text{para} \quad \varepsilon_s > \varepsilon_y \quad (21)$$

donde,  $f_y$  es el límite de elasticidad del acero (tensión de fluencia) y  $E_s$  es el módulo de elasticidad del acero, adoptado igual a 200000 MPa.

#### 3.3.2 Relación tensión-deformación específica del hormigón

Para completar el modelo del alma de la viga fisurada, fue necesario realizar ensayos para establecer relaciones entre las tensiones principales con las deformaciones principales. Inicialmente [1], estos ensayos fueron realizados en placas de 89 cm x 89 cm x 7 cm cargadas en su propio plano. Con los resultados de los ensayos fue verificado que la inclinación de las tensiones principales varía muy poco en relación a la inclinación de las deformaciones principales y para simplificar las expresiones se consideran las mismas inclinaciones. La Figura 7, adaptada de [4], muestra un panel de la viga, armado y fisurado, y las fuerzas que intervienen en su diagrama de cuerpo libre.

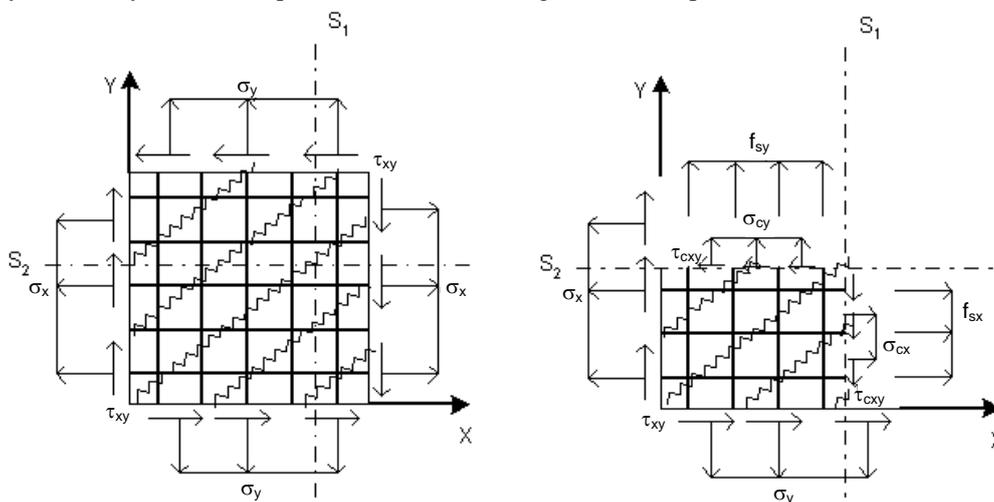


Figura 7 – Detalle del panel de hormigón armado fisurado y su diagrama de cuerpo libre.

Durante los ensayos, las tensiones  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  eran conocidas y bien controladas y las deformaciones específicas correspondientes  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  eran medidas. Las deformaciones medias en la armadura eran obtenidas por medición directa y considerando sus relaciones constitutivas se obtienen las tensiones correspondientes  $f_{sx}$  y  $f_{sy}$ , Figura 7.

Por equilibrio de fuerzas del diagrama de la Figura 7, se tiene:

$$\sigma_x = \rho_{sx} \times f_{sx} + \sigma_{cx} \quad \sigma_y = \rho_{sy} \times f_{sy} + \sigma_{cy} \quad (22)$$

$$\tau_{xy} = \rho_{sx} \times \tau_{sx} + \tau_{cx} \qquad \tau_{yx} = \rho_{sy} \times \tau_{sy} + \tau_{cy} \qquad (23)$$

En estas expresiones,  $\rho_{sx}$  y  $\rho_{sy}$  son las cuantías de armadura longitudinal y transversal respectivamente.

En las relaciones (22), las únicas incógnitas desconocidas son  $\sigma_{cx}$  y  $\sigma_{cy}$ , determinando de esta manera, las tensiones en el hormigón para cada etapa de carga. De las Eq. 23, considerando que la tensión tangencial perpendicular a la armadura es nula, la tensión tangencial del hormigón es igual a la tensión tangencial provocada por las fuerzas actuantes, así:

$$\tau_{xy} = \tau_{cx} = \tau_{cy} = \tau_{cxy} \qquad (24)$$

Determinadas las tensiones actuantes en el hormigón ( $\sigma_{cx}$ ,  $\sigma_{cy}$  y  $\tau_{cxy}$ ), es posible construir un círculo de Morh en todas las etapas de carga durante los ensayos. Para cada círculo de Morh es posible determinar las tensiones principales en cada etapa y mediante análisis de regresión se determinan las relaciones constitutivas para el hormigón comprimido debilitado y para el traccionado.

**a) Hormigón comprimido**

La relación constitutiva para el HAR comprimido es la que corresponde al ítem 2.1 y para el HAR comprimido debilitado puede ser adoptada como:

$$\sigma_{c2}(\varepsilon_2) = f_{c2,max} \times \sigma(\varepsilon_2, \varepsilon_{cm}) \qquad (25)$$

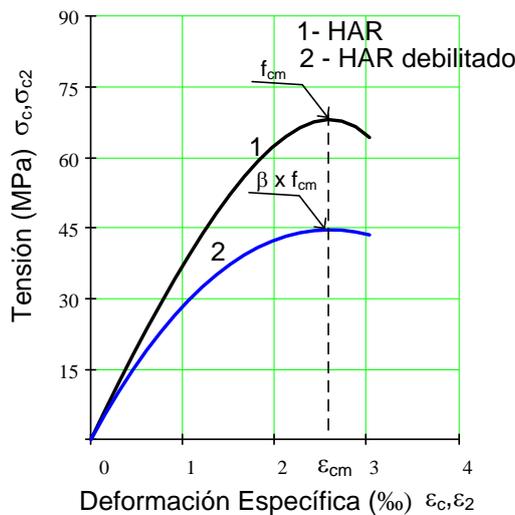
donde  $\sigma(\varepsilon_2, \varepsilon_{cm})$  es la expresión (1) sin incorporar  $f_{cm}$ ;  $f_{c2,max} = \beta \times f_{cm}$ , con  $\beta$  como el factor de debilitamiento, obtenido de [5] y que está dado por la siguiente expresión:

$$\beta = \frac{1}{1 + K_c} \qquad (26)$$

La expresión para  $K_c$  es:

$$K_c = 0,27 \times \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{cm}} - 0,37 \right) \qquad (27)$$

Este modelo introducido en un análisis no lineal de elementos finitos se correlaciona muy bien con los resultados de laboratorio [6]. La Figura 8 muestra la curva para un HAR y un HAR debilitado para un  $\varepsilon_1$  de 6 %.



**Figura 8** – Modelo de un HAR con  $f_{cm} = 68$  MPa y su modelo debilitado con  $\varepsilon_1 = 6\%$ .

**b) Hormigón traccionado**

La relación constitutiva del hormigón traccionado depende del estado del hormigón, así, para un hormigón no fisurado hay una relación directa entre  $f_{c1}$  y  $\varepsilon_1$ :

$$f_{c1} = E_c \times \varepsilon_1 \tag{28}$$

En esta ecuación,  $E_c$  es el módulo de deformación tangente en el origen del hormigón, y para el HAR puede ser obtenido de (7), aplicando un factor multiplicador de 1,18. Después de agrietamiento del hormigón, la relación que se adopta es:

$$f_{c1} = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{500 \times \varepsilon_1}} \tag{29}$$

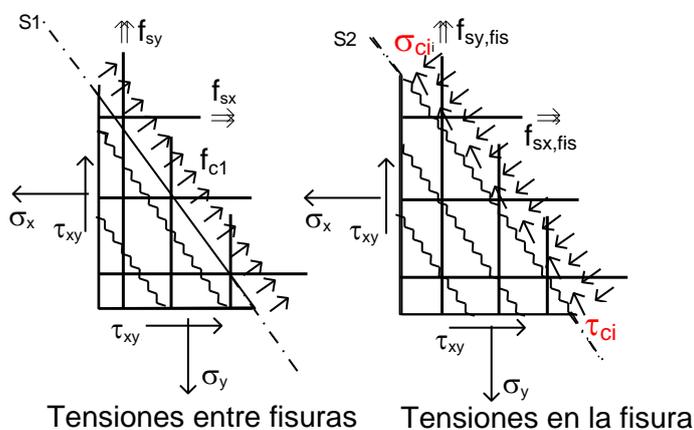
donde  $f_{cr}$  es la tensión que corresponde al inicio de la fisuración y puede ser adoptada como la resistencia a tracción mínima del hormigón, relación (10).

Si la deformación principal de tracción  $\varepsilon_1$  es elevada la abertura de fisuras aumenta y el valor de la resistencia a la tracción  $f_{c1}$  disminuye rápidamente, la cual es controlada por la posibilidad de la fluencia de la armadura transversal. La expresión adoptada de  $f_{c1}$  para elevados valores de  $\varepsilon_1$  es:

$$f_{c1} = \tau_{ci} \times tg \theta \tag{30}$$

donde  $\tau_{ci}$  es la tensión tangencial en la fisura.

Para determinar las tensiones actuantes en la fisura es necesario establecer el equilibrio en la fisura. La Figura 9 muestra el detalle de los esfuerzos en la fisura y entre fisuras.



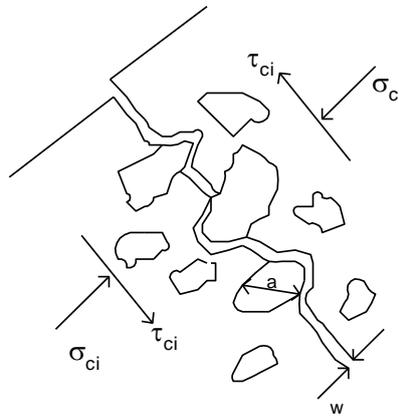
**Figura 9** – Detalle de las tensiones localizadas en la fisura y entre fisuras.

Se puede demostrar que es necesaria la presencia de las tensiones en la fisura para equilibrar el estado plano de tensiones en el alma de la viga. Estas tensiones,  $\tau_{ci}$  y  $\sigma_{ci}$ , son provenientes de la fricción entre agregados que ocurre en la interface de la fisura y sus valores son función de la abertura de la fisura, Figura 10. El HAR tiene una ruptura más frágil, sus fisuras atraviesan los agregados y como consecuencia la fisura tiene una interface menos rugosa, disminuye el contacto entre los agregados. Esta disminución es mayor especialmente para concretos con resistencias a compresión mayores a 70 MPa. El factor de debilitamiento  $\beta$  de (26) es adecuado para los HAR. Consultar [7] para la expresión de  $\beta$  de los hormigones convencionales.

La tensión tangencial en la fisura puede ser adoptada como [8]:

$$\tau_{ci} = \frac{0,18 \times \sqrt{f_{cm}}}{0,31 + \frac{24 + w}{a + 16}} \quad (31)$$

En (31) las unidades de las tensiones están en MPa, “w” es la abertura de las fisuras (mm) y “a” es el diámetro máximo del agregado (mm).



**Figura 10** – Transmisión de tensiones tangenciales y normales a través de la fisura.

La abertura de las fisuras puede ser estimada por las expresiones:

$$w = \varepsilon_1 \times s_\theta \quad (32)$$

$$s_\theta = \frac{1}{\frac{\text{sen } \theta}{s_{mx}} + \frac{\text{cos } \theta}{s_{my}}} \quad (33)$$

En estas expresiones:

- $s_\theta$  es la separación media entre fisuras en un tramo de viga (considerando fisuras paralelas);
- $s_{mx}$  es la separación media entre fisuras en la dirección de la armadura longitudinal;
- $s_{my}$  es la separación media entre fisuras en la dirección perpendicular a la armadura longitudinal.

donde, según [9]  $s_{mx}$  y  $s_{my}$  pueden ser calculados por:

$$s_{mx} = \frac{\phi_x \times f_{ct,m} \times (1 - \rho_{sx})}{2 \times \tau_{bo} \times \rho_{sx}} \quad s_{my} = \frac{\phi_y \times f_{ct,m} \times (1 - \rho_{sy})}{2 \times \tau_{bo} \times \rho_{sy}} \quad (34)$$

donde  $\phi_x$  y  $\phi_y$  son los diámetros de las armaduras en la dirección x y y, respectivamente;  $f_{ct,m}$  es la resistencia media del hormigón a tracción, expresiones (8) o (9) y  $\tau_{bo}$  es la tensión de adherencia entre el hormigón y la armadura en el instante de la fluencia y puede ser obtenida por  $\tau_{bo} = 2 f_{ct,m}$ .

Tres regiones fueron verificadas para la relación constitutiva de la tensión principal de tracción  $f_{c1}$ . La primera para el hormigón no fisurado (28). La segunda cuando el hormigón está fisurado (29) y la tercera cuando la deformación principal de tracción  $\varepsilon_1$  es elevada, (30). La Figura 11 muestra estas tres regiones.

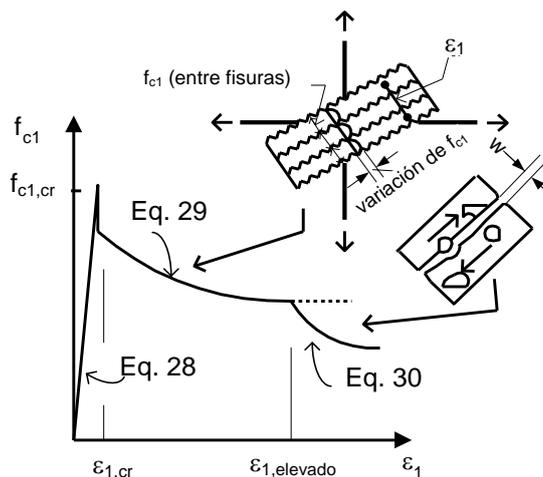


Figura 11 – Relación entre la tensión media principal de tracción con  $\epsilon_1$ .

#### 4. APLICACIÓN A UN CASO PRÁCTICO

El procedimiento descrito anteriormente será aplicado al dimensionamiento de una sección rectangular de hormigón de 20 cm x 40 cm con un recubrimiento adimensional mecánico  $\delta = 0,1$ . Las propiedades de los materiales fueron adoptadas como  $f_{ck} = 60$  MPa y  $f_{yk} = 500$  MPa. Los esfuerzos actuantes corresponden a una sección de esfuerzos máximos y son:  $M_d = 200$  kN.m,  $N_d = 0$  y  $V_d = 123,1$  kN. La armadura transversal será formada por estribos verticales ( $\alpha = 90^\circ$ ).

Empleando las expresiones de los ítems anteriores y utilizando un programa de computación algébrica y simbólica, fue realizado un dimensionamiento integral incluyendo los esfuerzos que producen tensiones cortantes y tensiones normales para el cálculo de la armadura longitudinal y transversal. Para calcular la deformación específica transversal  $\epsilon_y$  (de los estribos), es necesario conocer la deformación específica longitudinal  $\epsilon_x$ , expresiones (18) y (19), la cual fue adoptada al nivel de la armadura longitudinal traccionada por el momento flector. Para su obtención (de  $\epsilon_x$ ) fue necesario incluir la configuración de ruptura de una sección sujeta a flexión compuesta, mayores detalles en [10]. El  $\epsilon_2$  (en este caso  $\epsilon_m$ ) corresponde a la tensión máxima (3). En [11] se sugiere que  $\epsilon_x$  puede ser obtenida a media altura de la sección mediante la expresión:  $\epsilon_x = [V_d(1+1,1M_d/V_d)]/(2E_sA_s)$

Como  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_x$  dependen de  $\theta$ , fue necesario, adoptar mediante procedimientos interactivos (Tabla 1) el valor adecuado de  $\theta$  para que  $\epsilon_y$  no sea mayor al límite establecido por norma de 10‰. Para el dimensionamiento fue contemplado los factores de ponderación de los materiales de la norma [2], aplicado este a la resistencia del hormigón y a su módulo de deformación y también a la resistencia de la armadura. Para tener resultados más reales fue realizada una integración numérica del diagrama tensión-deformación específica realista en la obtención de la resultante del hormigón comprimido (ítem 2.1).

El valor encontrado de para la deformación específica longitudinal fue:  $\epsilon_x = 5,18\%$ . Para esta configuración de ruptura la armadura longitudinal es  $A_s = 14,92$  cm<sup>2</sup>, que representa una cuantía de armadura longitudinal de 1,9%. Otros parámetros adoptados fueron: cuantía de armadura transversal de 0,4%, diámetro de la armadura longitudinal de 20 mm, de la transversal de 6 mm y el diámetro máximo del agregado de  $\frac{3}{4}$ ".

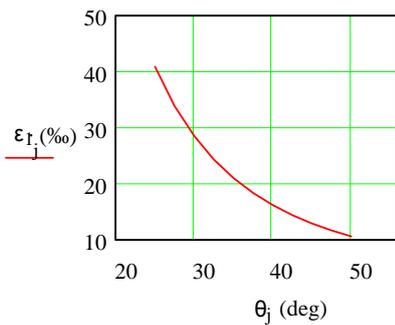
Por las Curvas 1 y 2, se verifica que al incrementar  $\theta$  la deformación específica principal media de tracción y la deformación específica de los estribos son menores. La Curva 3 muestra que al incrementar  $\theta$  aumenta la tensión principal máxima de compresión del hormigón debilitado  $f_{c2max}$ , pudiendo soportar mayores compresiones la biela comprimida. La Curva 4 muestra como  $f_{c2max}$  disminuye con el aumento de la deformación específica principal media de tracción  $f_{c1}$ . En las Curvas 5, la línea segmentada es de un HAR normal, la curva punteada de un hormigón debilitado par un  $\theta = 42,5^\circ$  y la línea llena para un hormigón debilitado con  $\theta = 25^\circ$ . Luego para menores ángulos  $\theta$  menor es la tensión que pueden soportar las bielas comprimidas (menor es el valor de  $V_{Rbiela}$ ).

Según la Tabla 1, para el caso del ejemplo, para  $\theta = 40^\circ$  la deformación específica del estribo  $\epsilon_y = 8,45$  ‰ es menor al límite de 10‰ ( $\theta = 40^\circ$  será el ángulo adoptado).

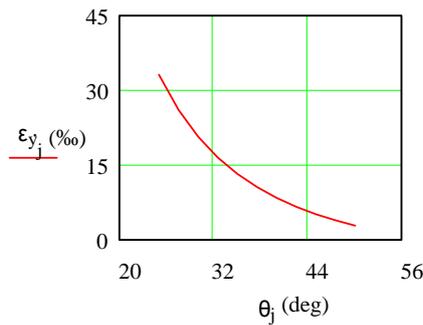
**TABLA 1 – PARÁMETROS DEL HORMIGÓN Y DE LA ARMADURA EN FUNCIÓN DE LA INCLINACIÓN DE LA DIAGONAL COMPRIMIDA**

$j =$	$\frac{\theta_j}{\text{deg}} =$	$\varepsilon_{1j} \cdot 1000 =$	$\beta_j =$	$\frac{f_{c2max_j}}{\text{MPa}} =$	$\frac{V_{Rbiela_j}}{\text{kN}} =$	$\varepsilon_{y_j} \cdot 1000 =$
0	25	40.92	0.194	7.74	182.9	33.15
1	27.5	33.86	0.226	9.03	228.09	26.09
2	30	28.5	0.258	10.33	275.98	20.73
3	32.5	24.33	0.291	11.64	325.32	16.56
4	35	21.03	0.323	12.93	374.79	13.26
5	37.5	18.38	0.355	14.2	423.08	10.61
6	40	16.22	0.386	15.44	468.86	8.45
7	42.5	14.44	0.416	16.63	510.92	6.67
8	45	12.95	0.444	17.77	548.13	5.18
9	47.5	11.71	0.471	18.86	579.5	3.94
10	50	10.65	0.497	19.89	604.17	2.88

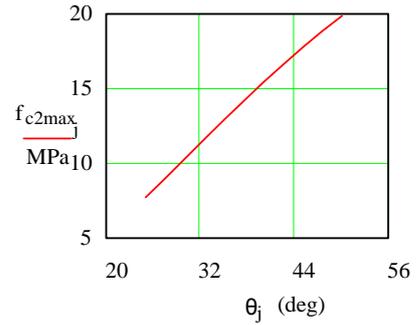
Con los resultados de la Tabla 1 fueron elaboradas las curvas 1 a 5:



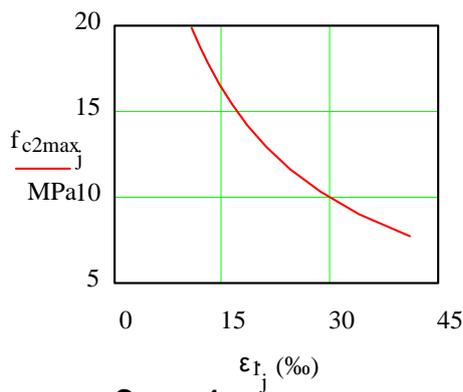
**Curva 1**



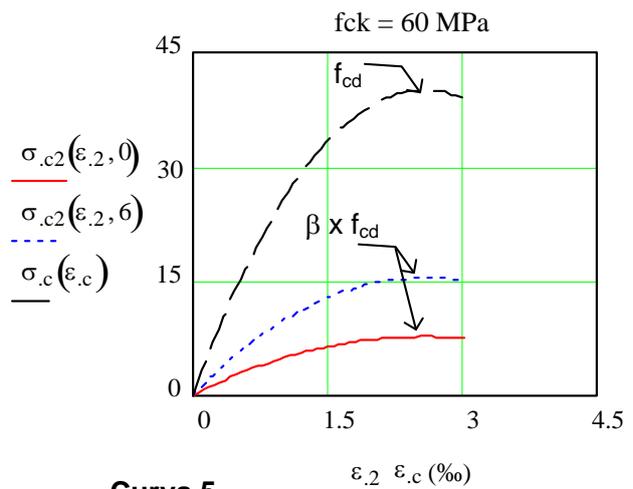
**Curva 2**



**Curva 3**



**Curva 4**

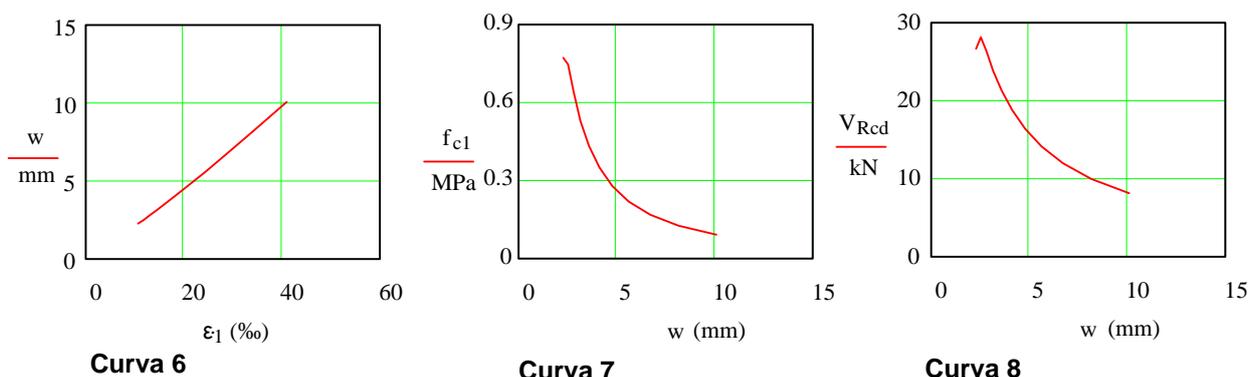


**Curva 5**

**TABLA 2 – APOORTE DEL HORMIGÓN EN LA RESISTENCIA AL CORTANTE EN FUNCIÓN AL ÁNGULO  $\theta$**

j =	$\frac{\theta_j}{\text{deg}} =$	$\frac{s_{\theta_j}}{\text{cm}} =$	$\varepsilon_{1_j} \cdot 1000 =$	$\frac{w_j}{\text{mm}} =$	$\zeta_j =$	$\zeta_{\text{lim}_j} =$	$\zeta_{\text{adot}_j} =$	$\frac{f_{c1_j}}{\text{MPa}} =$	$\frac{V_{Rcd_j}}{\text{kN}} =$
0	25	24.61	40.92	10.07	0.128	0.026	0.026	0.09	8.16
1	27.5	24.02	33.86	8.13	0.124	0.031	0.031	0.13	10
2	30	23.5	28.5	6.7	0.12	0.038	0.038	0.17	12.01
3	32.5	23.04	24.33	5.61	0.115	0.044	0.044	0.22	14.17
4	35	22.65	21.03	4.76	0.111	0.052	0.052	0.28	16.45
5	37.5	22.31	18.38	4.1	0.107	0.059	0.059	0.35	18.84
6	40	22.02	16.22	3.57	0.102	0.067	0.067	0.43	21.31
7	42.5	21.78	14.44	3.14	0.098	0.075	0.075	0.53	23.83
8	45	21.59	12.95	2.8	0.093	0.083	0.083	0.64	26.37
9	47.5	21.44	11.71	2.51	0.088	0.091	0.088	0.75	28.17
10	50	21.33	10.65	2.27	0.084	0.099	0.084	0.77	26.67

Con los resultados de la Tabla 2 fueron elaboradas las curvas 6 a 8:



En la Curva 6 se observa que la abertura de las fisuras aumenta con el aumento de la deformación específica principal media de tracción. Las Curvas 7 y 8 muestran como la tensión principal media de tracción y el aporte en la resistencia al cortante del hormigón disminuyen con el aumento de la abertura de fisuras. En la tabla anterior  $\zeta$  es un parámetro que sirve para definir el valor de la resistencia a tracción entre las fisuras diagonales del hormigón, por seguridad será adoptado en menor entre el  $\zeta$  (29) y el  $\zeta_{\text{lim}}$  (30). Según la Tabla 2, con (29) se obtiene el menor valor hasta el ángulo  $\theta = 45^\circ$ .

El área de la armadura transversal por unidad de largo [ $z (\cot \theta + \cot \alpha)$ ], es:

$$A_{sw} = \left( \frac{V_d - V_{Rc}}{z \times (\cot \theta + \cot \alpha) \times \text{sen}^2 \alpha} \right) \frac{1}{\sigma_{sd\alpha}} \tag{35}$$

donde  $V_{Rc}$  es el aporte del hormigón en la resistencia al cortante y según [4] puede ser obtenida por:

$$V_{Rc} = f_{c1} \times z \times b \times (\cot \theta + \cot \alpha) \times \text{sen} \alpha \tag{36}$$

donde  $f_{c1}$  puede ser obtenida por (29) o (30) según el grado de fisuración del hormigón. El valor de la tensión de trabajo de la armadura  $\sigma_{sd\alpha}$  puede ser obtenida de (20) o (21). Para  $\theta_{\text{adop}} = 40^\circ$  la expresión (29) prevalece y  $f_{c1} = 0,43$  MPa. Finalmente para el cortante actuante de  $V_d = 123,1$  kN y  $\theta = 40^\circ$ , el área de armadura transversal encontrada fue de  $A_{sw} = 6,37$  cm<sup>2</sup>/m o  $\Phi 8 @ 15$  cm.

Para verificar las bielas comprimidas, el valor de la tensión de compresión por unidad de largo [ $z(\cot\theta + \cot\alpha)$ ] es:

$$\sigma_{c\theta} = \frac{V_d}{z \times (\cot \theta + \cot \alpha) \times \text{sen}^2 \alpha \times b} \quad (37)$$

El valor de esta tensión debe ser menor a  $f_{c2,\max} = \beta \times f_{cd}$ , donde  $\beta$  se debe obtener de (26).

Se referencia a [12] para mayores detalles en relación a la obtención de las expresiones (35) hasta (37).

## 5. CONCLUSIONES

Considerando que el HAR presenta características de ruptura frágil, para mejorar la ductilidad a la sección es aconsejable tener un cálculo y un detalle de la armadura más juicioso, como por ejemplo, adoptando el diagrama tensión-deformación específica más realista y un dimensionamiento con significado físico, como el considerado en este trabajo.

En este trabajo, se incluyó el cálculo de una sección de hormigón armado de alta resistencia sujeta a esfuerzos combinados, considerando el equilibrio estático, las relaciones constitutivas de los materiales y la compatibilidad de deformaciones entre las armaduras y el hormigón en función de las tensiones y deformaciones medias. Fueron incorporados algunos estudios realizados por M. Collins de su Teoría del Campo de Compresión Diagonal Modificada.

Para calcular el aporte del hormigón en la resistencia al cortante, se realizó un estudio detallado en la fisura, equilibrando los esfuerzos existentes en ésta, incluyendo en este sentido, la tensión principal media de tracción existente entre las fisuras como participante por esta resistencia.

Para el cálculo de la armadura transversal, se obtiene primero su deformación específica, de esta manera, se tiene un dimensionamiento seguro y económico. Las normas convencionales adoptan la tensión de fluencia como la tensión de trabajo de los estribos. Fue considerado el hormigón fisurado y atravesado por estribos como un material nuevo, con un diagrama tensión-deformación específica más abatido.

El HAR es un material que tiene su resistencia a compresión elevada, pero es poca su contribución en la resistencia al cortante, menor que el del hormigón convencional, porque la rugosidad del plano de fisuras es menor.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] F. J. Vecchio and M. P. Collins. "The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear." *ACI Structural Journal*, vol. 83, no. 2, March-April 1986.
- [2] European Committee for Standardization, Standard En 1992-1-1:2004, EUROCODE 2 (2004): *Design of Concrete Structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings*. Brussels, 2004.
- [3] E. C. Bentz et al. "Simplified Modified Compression Field Theory for Calculating Shear Strength of Reinforced Concrete Element." *ACI Structural Journal*, vol. 103, no. 4, July-August 2006.
- [4] M. P. Collins et al. "A General Shear Design Method." *ACI Structural Journal*, vol. 93, no. 1, pp. 36-45, February-March 1996.
- [5] F. J. Vecchio and M. P. Collins. "Compression Response of Cracked Reinforced Concrete." *Journal of Structural Engineering*, vol. 119, no. 12, pp. 3590-3610, December 1993.
- [6] Vecchio F. J., Collins M. P. and Aspiotis J., *High-Strength Concrete Elements Subjected to Shear*. ACI Structural Journal, v. 91, n. 4, p. 423-433, July-August 1994.
- [7] F. Aguirre et al. "Modelos de resistência ao esforço cortante pela teoria do campo da compressão diagonal modificada para concretos de alta resistência." In *Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto*, VI, São Paulo (SP). Anais, São Paulo: EPUSP, 22 p., 2006.
- [8] E. G. Sherwood et al. "Effect of Aggregate Size on Beam-Shear Strength of Thick Slabs." *ACI Structural Journal*, vol. 104, no. 2, March-April 2007.
- [9] W. Kaufmann. "Analysis of RC Membranes in Design Practice." In: *Fib Symposium Prague*, Proceeding, Prague, 15 p., 1999.
- [10] F. Aguirre. "Axial load and moment interaction charts for high performance concrete." *Investigación & Desarrollo*, no. 3, pp. 23-34, Enero-Junio, 2003.

- [11] M. P. Collins et al. "Where is Shear Reinforcement Required?" *ACI Structural Journal*, vol. 105, no. 5, September-October 2008.
- [12] F. Aguirre y A. Moscoso. *Estudio teórico y experimental de vigas de hormigón armado sujetas a flexión*. ICivil, no. 6, 2009-2010.
- [13] Standards Council of Canada, *Design on Concrete Structures for Buildings*, CAN3-A23.3-04. Canadian Standard Association, Canada, 2004.