

UNA NUEVA ALTERNATIVA NUMÉRICA PARA LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN UNIDIMENSIONAL DE RICHARDS: ESTUDIO DE DRENAJE E INFILTRACIÓN DE FLUIDOS EN LA ZONA NO SATURADA

Evelyn Álvarez Sierra*, Lilliam Álvarez Díaz** y Maria Teresa Alonso González***

* Universidad Privada Boliviana

** Ministerio de Ciencia y Tecnología, Cuba

*** Universidad de la Habana, Cuba

ealvarez@upb.edu

(Recibido el 19 de julio 2006, aceptado para publicación el 16 de octubre 2006)

RESUMEN

En el trabajo se comparan dos métodos numéricos para resolver el modelo unidimensional de infiltración y drenaje de agua en la zona no saturada en medios porosos, el cual es modelado respecto al contenido de humedad utilizando la ecuación no-lineal de Richards. El primer método está basado en el método clásico de Diferencias Finitas y el segundo en el método de Líneas combinado con el código DASSL para la solución de las ecuaciones diferenciales-algebraicas resultantes. Se muestra que el último método proporciona una vía numérica eficiente para la solución de problemas de EDPs que tienen un comportamiento singular de *shock* u ondas viajeras, como es el caso de la ecuación de Richard, los cuales se pueden resolver numéricamente con éxito sólo utilizando esquemas muy estables. Los métodos numéricos discutidos en el trabajo se aplican a dos tipos de suelos reales: *Yolo Light Clay* y *Brindabella Silty Clay Loam*, usando las propiedades hidráulicas referidas en Broadbridge y White [16]. Para validar el modelo, se comparan los perfiles de humedad con los resultados reportados por Warrick, Lomen e Islas [18]. Igualmente, se demuestra con datos reales la ventaja de resolver numéricamente el comportamiento del flujo unidimensional en la zona no saturada de un medio poroso. Finalmente, el modelo propuesto y los resultados numéricos obtenidos posibilitan brindar un pronóstico sobre la utilización de recursos hídricos para el caso de riego en agricultura y también para el transporte de contaminantes.

Palabras Clave: Ecuación de Richards, Drenaje, Infiltración de Fluidos, Zonas Saturadas.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años se observa en el ámbito mundial una tendencia creciente al estudio de problemas relativos al agua subterránea. Si a principios del siglo XX era posible resolver los problemas de explotación de depósitos de agua subterránea por métodos relativamente aproximados y sin una base científica rigurosa, la necesidad de poder determinar con la mayor precisión posible los recursos de agua subterránea y la forma óptima de su explotación, unido al carácter complejo de los factores que inciden en su ocurrencia y aprovechamiento, implica necesariamente la utilización de métodos más rigurosos y de técnicas modernas.

El estudio en la Zona Saturada es mucho más sencillo debido principalmente a que el valor de la conductividad hidráulica (K), se mantiene constante a efectos prácticos. Reviste gran importancia el estudio del flujo de agua en suelos No Saturados, caso típico de los problemas de riego en cualquiera de sus variantes (por gravedad, por aspersión ó riego localizado). Es por ello que, durante las últimas tres décadas, han sido desarrollados modelos numéricos para flujos *no saturados*.

Una de las primeras aplicaciones al estudio del flujo multifase en medios porosos para suelos parcialmente ocupados por aire fue desarrollado por Richards en 1931 [1] mediante un modelo de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, (EDPs). Estos flujos son inherentemente no lineales, por lo que la simulación numérica es la única estrategia efectiva para estudiar su comportamiento cuantitativo. Se conoce que la simulación numérica de la infiltración de agua en suelos no saturados es un problema numérico muy difícil cuando se tiene en cuenta la presión de aire [2 – 6]. Varios son los métodos numéricos utilizados para resolver este tipo de problema, entre ellos el de Diferencias Finitas [4 y 5], Elementos Finitos y los Métodos de Elementos de Contorno [7].

Otro de los métodos utilizados para la solución de la ecuación de flujo en la zona no saturada es el Método de Líneas, el cual comenzó a desarrollarse en la década del 80 a partir de la aparición de códigos que resolvían eficientemente las Ecuaciones Diferenciales Algebraicas (EDAs) resultantes [8] y [9]. Los resultados de Griepentrog y März [10], así como los de Petzold [9] en la década de los 80, fueron fundamentales tanto para el avance en la comprensión teórica de las EDAs como para el diseño de algoritmos eficientes para su solución numérica.

Al estar disponible para el público el código DASSL [8], se abrieron las puertas a la solución de las EDAs, lo cual causó un *boom* en la década de los 80 con el uso de paquetes altamente eficientes como ODEPACK, las familias LSODE, LSODI y LSODA para problemas *no-stiff* y *stiff*, hoy también disponibles en MATLAB [11], [12]. Con el código DASSL quedó entonces despejado el problema de poder resolver las EDAs obtenidas al aplicar el Método de Líneas a los sistemas de EDPs con restricciones algebraicas añadidas, como es el ejemplo que se plantea en el presente trabajo. El Método de Líneas ha sido aplicado para resolver EDPs en los años recientes [13], [14].

En este trabajo se propone calcular el contenido de humedad de diferentes tipos de suelos resolviendo numéricamente la ecuación de Richards, especificada en la sección 2, el desarrollo de su solución numérica a través de un esquema en Diferencias Finitas y el Método de Líneas apoyado en el código DASSL, sección 3. En la sección 4, a modo de validación, se aplicó esta técnica a dos suelos reales: el *Yolo Light Clay* y *Brindabella Silty Clay Loam*, usando las propiedades hidráulicas referidas en White and Broadbrige [15 y 16], obteniéndose los perfiles de humedad para cada suelo.

2. MODELO MATEMÁTICO DE INFILTRACIÓN

El proceso de introducir suavemente un líquido entre los poros de un sólido, por ejemplo el suelo, ya sea debido a causas naturales como las lluvias o causas externas como un derrame de petróleo, se denomina infiltración. Si la porción de suelo está compuesta por moléculas de agua, suelo y aire básicamente, se trata de un problema de infiltración en Zona No Saturada, lo contrario significa suponer ausencia de aire y una saturación de agua en los poros del suelo, es decir, la Zona Saturada, Figura 1.

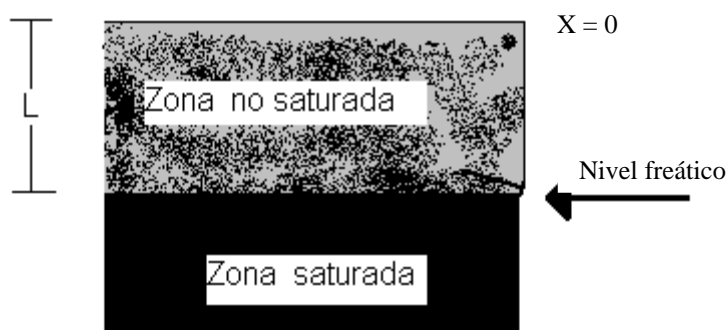


Figura 1 – Composición de un suelo.

Para la modelación del proceso de infiltración de agua en Zona No Saturada se utilizan los siguientes parámetros:

- **Contenido de humedad, θ**

El contenido de humedad de una porción de suelo se define como:

$$\theta(x, t) = \frac{V_a}{V} \quad (1)$$

donde V_a es el volumen de agua y V el volumen total de la porción de suelo. La función (θ) depende de la profundidad (x) y el tiempo (t).

- **Conductividad hidráulica, $K(\theta)$**

La conductividad hidráulica, también conocida como permeabilidad, es la capacidad del suelo para conducir agua a través de una red de conductos interconectados y continuos. Cuando el contenido de agua decrece, el tamaño y el número de estos conductos se reduce, por eso la capacidad de conducción de agua decrece; por el contrario, cuando el suelo está completamente saturado, los conductos están disponibles y por tanto la conductividad hidráulica estará en su máximo. En la zona no saturada, la conductividad hidráulica K se calcula como el producto de la conductividad hidráulica en la zona saturada con la conductividad hidráulica relativa. La primera es una constante propia de la zona saturada, la segunda es una función que varía según el contenido de humedad:

$$K(\theta) = K_s K_r(\theta) \quad (2)$$

La conductividad hidráulica relativa K_r se define por la relación:

$$\begin{cases} K_r(\theta) = \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^a \\ a = H S \end{cases} \quad (3)$$

donde, S : succión o potencial mátrico, H : capacidad de retención de agua, θ_r : contenido de humedad residual (constante que representa la cantidad de agua que se mantendrá en el suelo aún si se presenta un proceso de drenaje), θ_s : contenido de humedad saturado (en la zona saturada), (valor constante).

Para la ecuación de conductividad hidráulica se tomaron resultados empíricos referidos en [1] y [15],

$$K(\theta) = \beta + \gamma(b - \theta) + \frac{\lambda}{[2(b - \theta)]} \quad (4)$$

donde:

$$\beta = K_s - [1 + 2C(C - 1)]\Delta K$$

$$\Delta K = K_s - K_r$$

$$\lambda = 2C^2(C - 1)\Delta K\Delta\theta$$

$$\Delta\theta = \theta_s - \theta_r$$

$$b = \theta_r + C\Delta\theta$$

C es una constante que mide el factor de textura del suelo, es decir, si la proporción de poros en el suelo es grande o pequeña.

▪ **Difusividad hidráulica, $D(\theta)$**

La difusividad hidráulica es la capacidad de difusión de agua en diferentes tipos de suelos. Se utilizará la siguiente ecuación de difusividad hidráulica:

$$D(\theta) = a(b - \theta)^{-2} \quad (5)$$

Finalmente, la ecuación del flujo expresada en función del contenido de humedad (θ), está dada por la ecuación de Richards, que surge de la ecuación de continuidad teniendo en cuenta la existencia del proceso de difusión desde el nivel del suelo ($x > 0$) hasta el nivel freático ($x < L$):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] - \frac{\partial K}{\partial x} \quad (6)$$

Tomando como condición inicial:

$$\theta(x,0) = \begin{cases} \theta_s & 0 < x \leq l \\ \theta_r & x > l \end{cases} \quad (6.1)$$

donde l es la profundidad de cambio entre el contenido de humedad residual y saturado. Este valor es determinado por las mediciones de campo en un tiempo inicial y debe ser menor al valor de frontera L .

A la ecuación (6) se añaden las siguientes condiciones de fronteras:

$$\begin{cases} x = 0: & K(\theta(0,t)) - D(\theta(0,t)) \frac{\partial \theta}{\partial x} = v(x) = R, \\ x = L: & \theta(L,t) = \theta_r \end{cases} \quad (6.2)$$

con R la recarga hidráulica, es decir la velocidad con que se mueve el agua dentro del suelo. Normalmente, $R = v(x)$ depende de la profundidad, pero en este trabajo se tomó como constante dentro de la zona no saturada y con signo positivo contrario a la gravedad.

Los valores de S , C , ΔK , $\Delta \theta$ son dados en la Tabla 1 (adimensionados) [1].

TABLA 1 - PROPIEDADES HIDRÁULICAS DE LOS SUELOS

Parámetro	Suelo Yolo Light Clay	Suelo Brindabella Silty Clay Loam
$K_s - K_r$	$1.226 (10)^{-7}$	$3.27(10)^{-5}$
K_r	$1.2(10)^{-10}$	≈ 0
$S(\theta_s, \theta_r)$	$1.254(10)^{-4}$	$1.335(10)^{-3}$
$\theta_s - \theta_r$	0.2574	0.375
θ_r	0.2376	0.11
C	1.169	1.020
$h(C)/(C-1)$	0.5536	0.5076
λ	0.276	0.0738

3. TÉCNICA NUMÉRICA

Los métodos numéricos clásicos para resolver Ecuaciones en Derivadas Parciales requieren de una discretización de todas las derivadas por Diferencias Finitas o por Elementos Finitos. En esta sección primeramente se mostrarán dos esquemas implícitos en diferencias: el método de Diferencias Finitas hacia adelante y el método de Lax – Fredich y luego se desarrolla el Método de Líneas donde solamente se discretizan las derivadas espaciales (x), convierte el problema de derivadas parciales en un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas (EDAs) en el tiempo.

3.1 MÉTODO EN DIFERENCIAS FINITAS

En la ecuación (6) se discretiza la variable espacial, mediante un esquema en diferencias finitas de tipo implícito [17], considerando un tamaño de paso constante Δx , o sea:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = \left(\frac{1}{2} (D_{i+1} + D_i) \frac{(\theta_{i+1} - \theta_i)}{\Delta x} - \frac{1}{2} (D_{i+1} + D_i) \frac{(\theta_i - \theta_{i-1})}{\Delta x} \right) \frac{1}{\Delta x} \quad (7)$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{K_i - K_{i-1}}{\Delta x} \quad (8)$$

donde $\theta_i(x_i, t)$, $D_i = D(\theta_i)$ y $K_i = K(\theta_i)$.

En el caso de la discretización del tiempo se consideran dos esquemas, uno de tipo implícito hacia adelante, con tamaño del paso igualmente constante Δt , o sea:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta t} \quad (9)$$

y el esquema de Lax–Fredrich, donde se reemplaza θ_i^n por un promedio en el espacio:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \frac{\theta_i^{n+1} - \frac{1}{2}(\theta_{i-1}^n + \theta_{i+1}^n)}{\Delta t} \quad (10)$$

Las funciones $D(\theta)$ y $K(\theta)$ son no lineales, por lo que en la construcción de los esquemas en diferencias siguientes, se toman sus valores en el tiempo anterior. Así, la solución del modelo se obtiene resolviendo un sistema de ecuaciones algebraicas lineales.

Para el caso del esquema *hacia delante*, sustituyendo (7), (8) y (9) en (6) resulta:

$$\frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(D_{i+1}^n + D_i^n) \frac{(\theta_{i+1}^{n+1} - \theta_i^{n+1})}{\Delta x^2} - \frac{1}{2}(D_{i-1}^n + D_i^n) \frac{(\theta_i^{n+1} - \theta_{i-1}^{n+1})}{\Delta x^2} - \frac{K_i^n - K_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (11)$$

donde $\theta_i^n = \theta(x_i, t_n)$; $D_i^n = D(\theta_i^n)$; $K_i^n = K(\theta_i^n)$; $i = 2, \dots, k$.

En el esquema de Lax-Fredrich, se sustituyendo (7), (8) y (10) en (6) se tiene:

$$\frac{\theta_i^{n+1} - \frac{1}{2}(\theta_{i-1}^n + \theta_{i+1}^n)}{\Delta t} = \frac{1}{2}(D_{i+1}^n + D_i^n) \frac{(\theta_{i+1}^{n+1} - \theta_i^{n+1})}{\Delta x^2} - \frac{1}{2}(D_{i-1}^n + D_i^n) \frac{(\theta_i^{n+1} - \theta_{i-1}^{n+1})}{\Delta x^2} \quad (12)$$

Con las condiciones de fronteras (6.2) para ambos esquemas en $x = 0$ ($i = 1$):

$$K_1^{n+1} - D_1^{n+1} \left(\frac{\theta_2^{n+1} - \theta_1^{n+1}}{\Delta x} \right) = R \quad (13)$$

y en $x = L$ ($i = k + 1$):

$$\theta_{k+1}^{n+1} = \theta_{k+1} \left((n + 1) \Delta t \right) \quad (14)$$

Además de la condición inicial (6.1) en $t = 0$:

$$\theta_i^0 = \theta^0(i\Delta x) \quad (15)$$

con $i = 1, \dots, k+1$

3.2 MÉTODO DE LÍNEAS

Para el método de Líneas, la discretización en el espacio se mantiene igual que en Diferencias Finitas. Agregando las condiciones de frontera como restricciones algebraicas, se convierte el problema en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas de valor inicial.

$$\begin{cases} K_1 - D_1 \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{\Delta x} = R \\ \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \frac{1}{2}(D_{i+1} + D_i) \frac{(\theta_{i+1} - \theta_i)}{\Delta x^2} - \frac{1}{2}(D_{i-1} + D_i) \frac{(\theta_i - \theta_{i-1})}{\Delta x^2} + \frac{(K_i - K_{i-1})}{\Delta x}, & i = 2, \dots, k \\ \theta(L, t) = \theta_{k+1} \\ \theta(x_i, 0) = \theta_i^0, & i = 2, \dots, k \end{cases} \quad (16)$$

4. APLICACIONES

Para resolver numéricamente los esquemas (11, 13, 14 y 15) y (12-15) obtenidos en la sección 3, se escribió primeramente un código en Matlab para resolver un sistema de ecuaciones lineales. En el caso del esquema (16), se utilizó el código DASSL para resolver Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Algebraicas (EDA).

El código DASSL es un software diseñado por L. Petzold en 1982 [9] en FORTRAN 77, que resuelve numéricamente sistemas de Ecuaciones Diferenciales Algebraicas implícitas y explícitas de índice 0 o 1 con condiciones de valor inicial. Entendiéndose como índice de una EDA, las veces que es necesario derivar la ecuación hasta obtener la derivada de la variable dependiente como una función continua de la independiente. El tratamiento numérico de estos problemas por el DASSL está basado en las fórmulas en diferencias hacia atrás, (*Backward Difference Formulas*) [8], una herramienta poderosa en cuanto a la estabilidad del esquema. Dependiendo del comportamiento de la solución, el código selecciona automáticamente el tamaño del paso en el tiempo y el orden de las BDF.

El análisis teórico de la convergencia de las BDFs aplicadas a las EDAs, la manera en que se implementan los métodos de multipasos del predictor–corrector, así como las estrategias de selección automática del paso y del orden del método, están bien documentadas en la referencia [8].

A continuación se simula el proceso de infiltración y drenaje con diferentes condiciones de frontera. En todos los casos las variables fueron consideradas sin dimensiones, de acuerdo con las expresiones en [18]. Los ejemplos escogidos pertenecen a los suelos tipo *Yolo Light Clay* y *Brindabella Silty Clay Loam* caracterizados por las propiedades hidráulicas referidas en [15], Tabla 1.

▪ Caso 1: Proceso de infiltración en un suelo de tipo *Brindabella Silty Clay*

La condición inicial se caracteriza por:

$$\theta(x,0) = \begin{cases} 0.48 & 0 < x \leq 0.25 \\ 0.11 & x > 0.25 \end{cases}$$

y la condición de frontera final $\theta(L, t) = 0.11$, con $L = 0.4$ y la recarga $R = -(4.58)(10)^{-6}$.

Las gráficas 1a, 1b y 1c de la Figura 1 representan las soluciones obtenidas al resolver el Caso 1 por los métodos de Diferencias Finitas, Lax–Fredrich y de Líneas, respectivamente.

Los valores del tiempo oscilan entre 0 y 80 horas, con un $\Delta t = 10$. Según los dos primeros métodos, gráficos 1a y 1b, en el intervalo [0.2, 0.3] de profundidad, la solución se comporta de manera inestable, siendo imposible seguir el comportamiento de la solución de un problema *stiff*, como es el caso de la ecuación de Richard. Sin embargo, en la gráfica 1c, que muestra la solución por el Método de Líneas, no aparecen inestabilidades en este intervalo, lo cual es una primera ventaja del método para este tipo de ecuaciones, rechazando así los métodos en diferencias finitas en la solución de la ecuación de Richard.

Para la validación del modelo se utilizó los datos experimentales reportados en [18]. En este caso, se conocen valores luego de transcurrir 5 horas y hasta una profundidad de $L=0.4$.

Las condiciones iniciales sufren una ligera transformación con respecto al caso anterior

$$\theta(x,0) = \begin{cases} 0.45 & 0 < x \leq 0.25 \\ 0.11 & x > 0.25 \end{cases}$$

y los demás parámetros se mantienen inalterados.

En la Tabla 2 se comparan los resultados experimentales con los numéricos, estos últimos obtenidos por el Método de Líneas y el código DASSL luego de un proceso de interpolación. Se observa que el mayor error relativo que aparece en la tabla 2 es del orden de 3×10^{-2} , una cantidad aceptable para este tipo de resultados en el área de la ingeniería hidráulica, además no se aprecian oscilaciones de divergencia como en los casos de los esquemas en diferencias, a

pesar de que la solución sigue un comportamiento de *shock* u ondas viajeras, un cambio brusco tendiendo a la discontinuidad de la función. Para una mejor comparación visual de los resultados de la Tabla 2, se realizó la Figura 2.

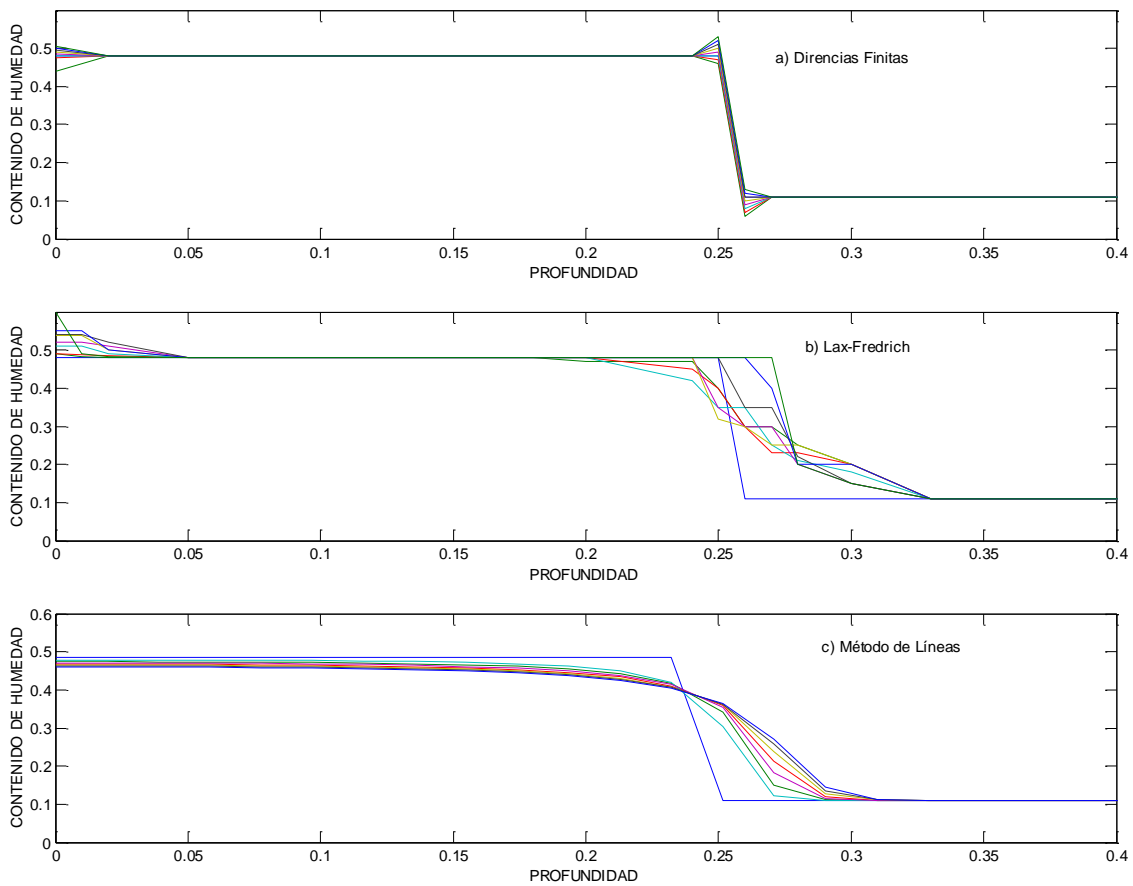


Figura 1 - Comparación de métodos para el Caso 1.

TABLA 2 – COMPARACIÓN DE RESULTADOS EXPERIMENTALES Y NUMÉRICOS

Profundidad	Contenido de Humedad Numérico	Contenido de Humedad Experimental	Error Relativo
0.00	0.4499	0.4490	2.00E-03
0.0444	0.4496	0.4473	5.14E-03
0.0889	0.4485	0.4441	9.91E-03
0.1333	0.4429	0.4351	1.79E-02
0.1778	0.4167	0.4056	2.74E-02
0.2222	0.3547	0.3425	3.56E-02
0.2667	0.2638	0.2545	3.65E-02
0.3111	0.1769	0.1723	2.67E-02
0.3556	0.1268	0.1256	9.55E-03
0.4000	0.1100	0.1100	0.00E+00

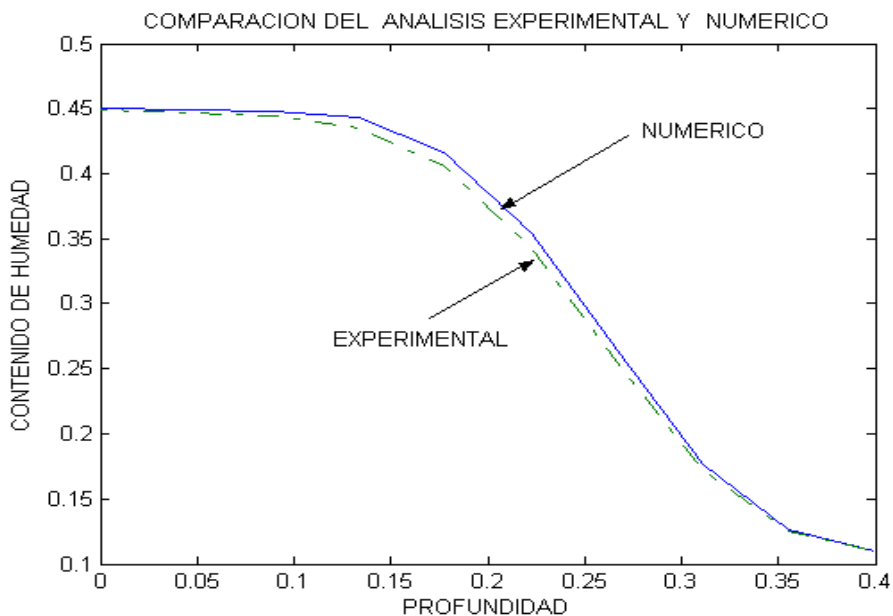


Figura 2 - Comparación gráfica del análisis experimental y numérico.

▪ **Caso 2: Infiltración con distribución de humedad inicial constante**

Para un segundo caso de infiltración, se considera como condición inicial $\theta(x,0) = 0.11$, con igual flujo de recarga que en el anterior caso $R = -(4.58)(10)^{-6}$. Este tipo de condición inicial significa que para un tiempo inicial el perfil del suelo tiene una distribución de humedad constante a cualquier nivel de profundidad, lo que representa en el modelo matemático una condición de tipo Dirichlet. Este tipo de distribución del contenido de humedad influye en el comportamiento de la conductividad y difusividad. En las gráficas de la Figura 3 se comparan los resultados obtenidos utilizando los Métodos en Diferencias Finitas y el de Líneas para los perfiles de contenido de humedad versus profundidad. Se considera un paso de tiempo de 10 horas.

En las gráficas 3a y 3b de la Figura 3 se aprecia claramente la inestabilidad del método en Diferencias Finitas y Lax-Fredrich en el intervalo $[0.5, 0.6]$. Sin embargo, en la gráfica 3c, que corresponde al Método de Líneas, la solución es estable y sigue el comportamiento esperado, en la medida que aumenta el tiempo el perfil de humedad baja lentamente con la profundidad, Tabla 3.

Además, para una condición inicial más seca, la propagación del frente húmedo se transporta a mayor profundidad que cuando la condición inicial del suelo es más húmeda, como en el Caso 2.

▪ **Caso 3: Drenaje desde un perfil húmedo sin evaporación para un suelo tipo *Yolo Light Clay***

Los parámetros que se utilizan en este caso son de un suelo tipo *Yolo Light Clay*, con drenaje desde un perfil húmedo sin evaporación, con flujo de recarga $R = 0$. Se toma como condición inicial una de tipo Riemann:

$$\theta(x,0) = \begin{cases} 0.495 & 0 < x \leq 0.25 \\ 0.22 & x > 0.25 \end{cases}$$

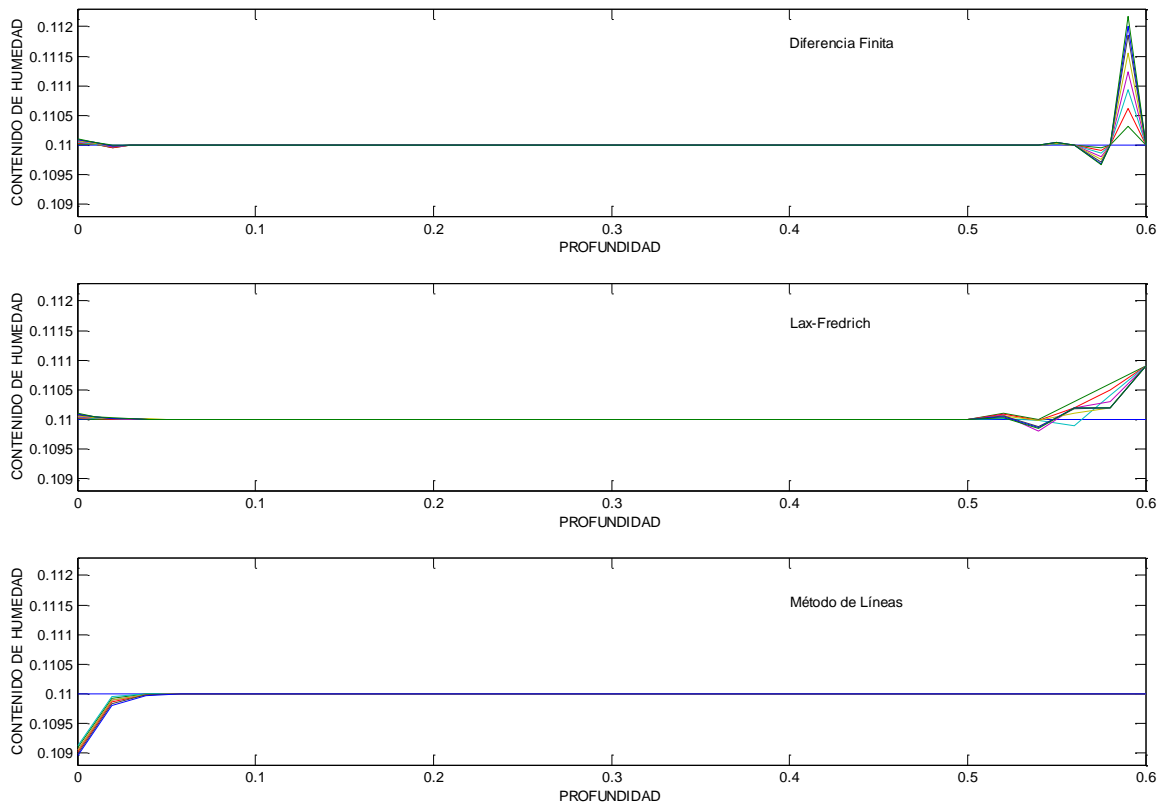


Figura 3 - Comparación de métodos para el Caso 2.

TABLA 3 – PERFIL DE HUMEDAD

PROF.	TIEMPO		
	40	60	80
0	0.10902	0.10896	0.1089
0.019355	0.10986	0.1098	0.10974
0.03871	0.11	0.10997	0.10996
0.058065	0.11	0.11	0.11
0.077419	0.11	0.11	0.11
0.096774	0.11	0.11	0.11
0.11613	0.11	0.11	0.11

A pesar de que en este caso se trabajó con otro tipo de suelo, los resultados numéricos con los tres métodos siguen el mismo comportamiento que con el suelo *Brindabella Silty Clay*, Figura 4. Con el Método de Líneas se obtiene una solución estable, con el de Diferencias y Lax-Fredrich la solución presenta inestabilidades en el intervalo [0.2, 0.35].

Finalmente, con estos ejemplos reales se puede verificar que a pesar de ser la ecuación de Richard muy *stiff*, con una solución de tipo *shock*, el Método de Líneas es una herramienta muy poderosa que permite seguir su comportamiento, validando de esta manera el modelo matemático y su solución numérica.

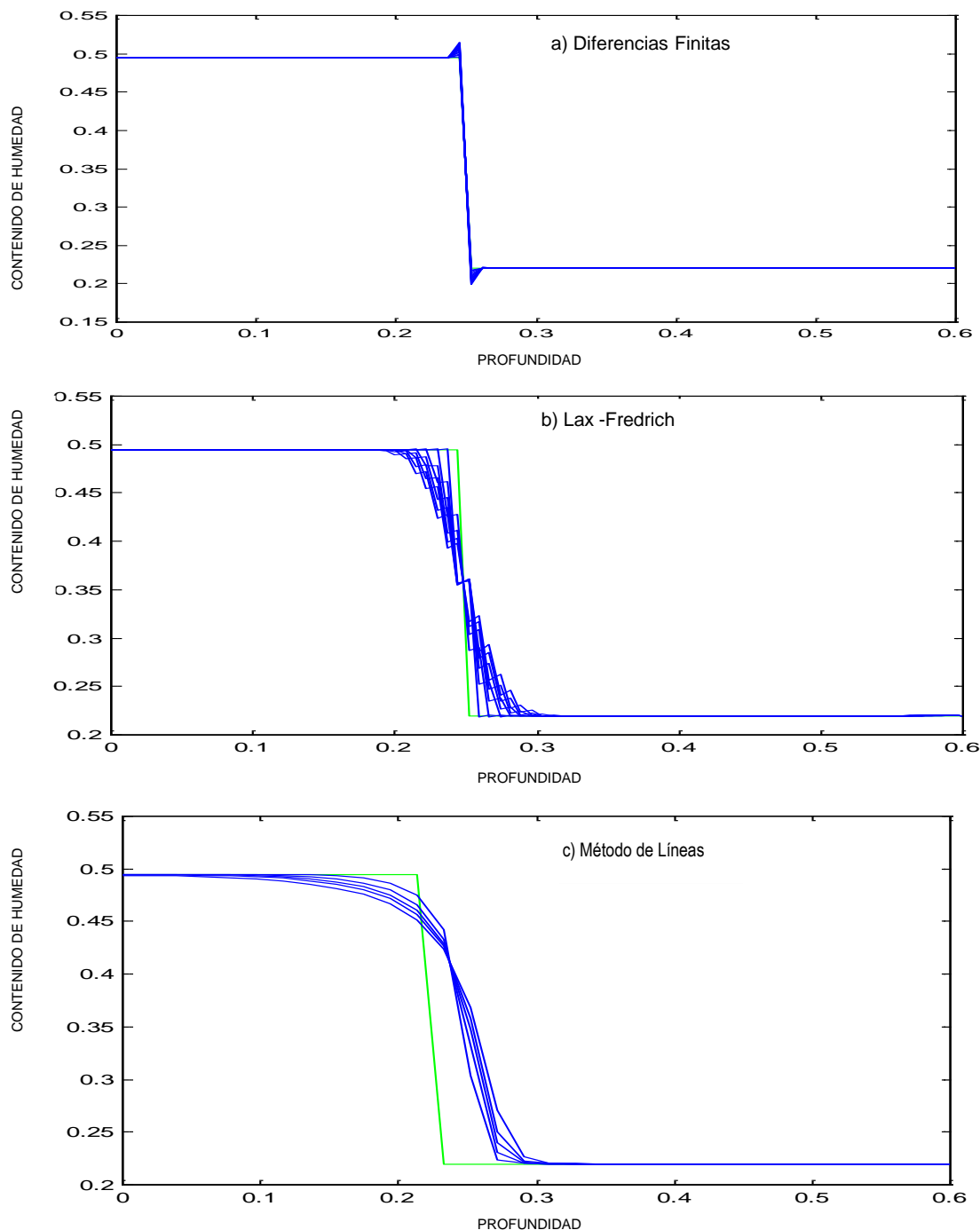


Figura 4 - Comparación de métodos para el Caso 3.

5. CONCLUSIONES

Para resolver la ecuación de Richards, el Método de Líneas combinado con las fórmulas en diferencias hacia atrás demostró ser el más apropiado. En cuanto al método en Diferencias Finitas, el esquema implícito centrado no converge en ningún caso, sin embargo el de Lax – Fredrich puede seguir el comportamiento de la solución siempre y cuando la condición inicial no sea constante.

La precisión en el cálculo del contenido de humedad posibilita brindar un pronóstico adecuado necesario en los estudios de recursos hídricos y medio ambientales como por ejemplo, el riego en la agricultura, el transporte de contaminantes, derrames hidrocarbúricos, lluvias ácidas, etc.

6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] L. A. Richards, "Capillary conduction of liquids in porous media," in *Physics I*, no 5, 1931, pp. 318-333.
- [2] R. G. Hills et al. "Modeling one-dimensional infiltration into very dry soils," *Water Resources Research*, 1989, pp. 181-187.
- [3] P. J. Ross, "Efficient numerical methods for infiltration using Richards equation," *Water Resources Research*, vol. 26, 1990, pp.279-290.
- [4] M. R. Kirkland and R.G. Hills, "Algorithms for solving Richards equation for variably saturated soils", *Water Resources Research*, 1992.
- [5] B. N. Wilson and D. C. Slack. *A comparison of three Infiltration Models*, 1981.
- [6] A. G. Williams et al. *Approaches to Modeling Richards Equation*, 1996.
- [7] V. Leitão et al. "The dual boundary elements formulation for elastoplastic fracture mechanics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- [8] K. E. Brenan et al. *Numerical solution of initial value problems of differential-algebraic equations*, Elsevier Pubs., 1989.
- [9] L. R. Petzold. *A description of DASSL, a differential/algebraic solver*, SANDIA Report, SAND-828637, 1982.
- [10] E. Griepentrog and R. März. *Differential-Algebraic Equations and their Numerical Treatment*, Teubner, Leipzig, 1986.
- [11] Hindmarsh, LSODE and LSODI. *Two initial value ordinary differential equation solvers*, ACM SIGNUM Newsletter, 15, 1980, pp10-11.
- [12] L. Shampine and M. W. Reichelt. *The Matlab ODE*, Suite, 1999.
- [13] C. Cunha and L. Alvarez. *Numerical solution of the Rapoport-Leas equation using the method of lines and the DASSL code*, Relatório de Pesquisa No.50/1997, IMECC, Brazil; *Journal on Computational Mathematics and Math. Phys.*, vol. 11, 1998, pp. 1851-1858.
- [14] J. M. Sanz – Serna. *Converge analysis of one-step schemes in the method of lines*, Applied Math and Comput. 1993, pp 183-195.
- [15] P. Broadbrige and I. White. "Constant rate rainfall infiltration: A versatile nonlinear model, 1. Analytical solution," *Water Resources Res.*, 24, NO.1145-154, 1988(a).
- [16] I. White and P. Broadbrige. "Constant rate rainfall infiltration: A versatile nonlinear model, 2: Applications of Solutions," *Water Resources Research*, 24, 1988, pp. 155-162.
- [17] A. A. Samarski. *Introducción a los Métodos Numéricos*, Ed. Mir, 1982.
- [18] A. W. Warrick et al. "An analytical solution to Richards Equation for draining soil profile," *Water Resources Research*, vol. 26, No. 2, 1990, pp. 253-258.